

משחק דיפרנציאלי
התחמקות מתצפית במודל שתי מכוניות זהות
משחק הדרגה

כתב: גרינפלד ישראל

תאריך ההוצאה: אב תשמ"ד
אוגוסט 1984

מחקר זה הוא מחקר עצמאי המהווה המשך לעבודת מגיסטר
שבצעתי בהנחיתו של ד"ר יוסף לוינן.

תוכן העינים

7	תקציר	
9	רשימת סמלים	
12	רשימת מונחים וקיצורים בעברית ובאנגלית	
14	מילות מפתח	
15	פרק 1: מבוא	
16	פרק 2: הצגת בעית ההתחמקות מתצפית	
16	2.1 מבוא	
17	2.2 הגדרות	
18	2.3 מערכות הצירים	
18	2.4 מרחב המשחק	
21	2.5 משוואות התנועה	
22	2.6 הגדרת המשחק	
23	2.7 החלק השימושי	
26	פרק 3: פתרונות כלליים למשוואות המסלול	
26	3.1 מבוא	
26	3.2 הבקורות האופטימליות והמשוואות הצמודות	
30	3.3 המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי	
31	3.4 משוואות המסלול האופטימלי - ריכוז הפתרונות	
34	פרק 4: משחק הדרגה	
34	4.1 מבוא	
35	4.2 תנאי התחלה	
39	4.3 מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות	
41	4.4 משוואות המשטח האוניברסלי EUS	
44	4.5 משוואות המסלולים האופטימליים והמשטח הדיספרסלי PDS	
49	4.6 תאור איכותי של המסלולים והמשטחים הסינגולריים	
51	4.7 תאור חתכי משחק הדרגה בערכי ψ שונים	
58	4.8 תאור תמרונים במרחב האמיתי	
58	4.9 גרדיאנט הערך ופונקציות המיתוג	

תוכן העניינים (המשך)

64	פרק 5: סיכום ומסקנות
65	נספח א': שיטת הפתרון הנומרי
65	A.1 מבוא
66	A.2 תהליך הפתרון הנומרי של משחק הדרגה
70	A.3 תוכנית מחשב עבור משחק הדרגה
77	רשימת מקורות

רשימת ציורים

19	מערכות צירים במשחק שתי מכוניות זהות	2.1
20	מרחב המשחק	2.2
25	החלק השימושי וגבולותיו	2.3
40	אסטרטגיות התחליתיות על החלק השימושי	4.1
42	מסלולי UP ו-EUS אופייניים במשחק הדרגה במרחב האמיתי	4.2
		תאור איכותי של המשטחים הסינגולריים והמסלולים במשחק הדרגה,	4.3
50	$K \geq \pi + 2$	
52	חתך ψ אופייני והגדרת אזורים במשחק הדרגה, $-\pi < \psi < 0$	4.4
53	חתכי θ_0 במשחק הדרגה, $K=6$, $\psi = -180^\circ$	4.5
54	חתכי θ_0 במשחק הדרגה, $K=6$, $\psi = -170^\circ$	4.6
55	חתכי θ_0 במשחק הדרגה, $K=6$, $\psi = -90^\circ$	4.7
56	חתכי θ_0 במשחק הדרגה, $K=6$, $\psi = -30^\circ$	4.8
57	איזוכרונות לבנית PDS במשחק הדרגה, $K=6$, $\psi = -170^\circ$	4.9
59	נקודת PDS A1 במרחב האמיתי במשחק הדרגה, $K=6$, צרוף aU-dU	4.10
60	נקודת PDS A2 במרחב האמיתי במשחק הדרגה, $K=6$, צרוף aE-dU	4.11
61	נקודת PDS A3 במרחב האמיתי במשחק הדרגה, $K=6$, צרוף bE-dE	4.12

ת ק צ י ר

מחקר זה עוסק במשחק דיפרנציאלי של התחמקות מתצפית במודל שתי המכונות הזהות, בגרסה של משחק הדרגה (Game of Degree). משחקים דיפרנציאליים הם מודלים מתימטיים לבעיות של קונפליקט דינמי. הניסוח ושיטות הפתרון דומים לאלה של תורת הבקרה, אך בעלי יחודיות הנובעת מריבוי תופעות סינגולריות, ומרמת הסיבוך אף בבעיות פשוטות. משפחת "שתי המכונות" שייכת למשחקי מרדף בעלי שני שחקנים, רודף ומתחמק. במשפחה זו לכל שחקן מגבלת מהירות ומגבלת קצב פניה. במודל זה נכללות בעיות בעלות היבט מעשי כמו מרדף אוירי, מרדף ימי, מניעת התנגשות וקביעת תפקיד, שהן בעלות רמת מורכבות גבוהה. מודל שתי המכונות הזהות, השייך למשפחה זו, ובו לשני השחקנים קינמטיקה ומגבלות בקרה זהות, נושא אופי פשוט יותר. רוב הבעיות שטופלו במחקרים עד היום עסקו בתפיסה, במובנה הישיר של הכנסת המתחמק לטווח התפיסה של הרודף. מעט מחקרים עסקו בבעית ההתחמקות מתצפית, שבה מטרת הנרדף להתחמק מתוך טווח התצפית של הרודף. אף כי הקינמטיקה יכולה להיות זהה, מטרות השחקנים והגדרת מרחב המשחק שונים במהותם, ולכן מתקבל הבדל גדול בפתרונות. בעית הרדיפה הרגילה, במשחק שתי המכונות הזהות, בטווח תפיסה מעגלי, נפתרה בעבר ע"י A. Merz. מחקר זה עוסק בבעיה הדואלית, התחמקות מתצפית באותו מודל. הוא משלים מחקר קודם שטיפל במשחק הסוג (Game of Kind), שעיקרו חלוקת מרחב המשחק לאזורי תפיסה והתחמקות באמצעות מחסום המפריד ביניהם. במחקר זה מוצג פתרון של משחק הדרגה, הכולל הגדרת אסטרטגיות אופטימליות ומסלולי התנועה באזור ההתחמקות. הפתרון בוצע בשיטות המקובלות בתורת המשחקים הדיפרנציאליים. הבטים אחדים של הפתרון מוצגים בצורה גראפית במרחב האמיתי ובמרחב המצב. התמרונים האופייניים המתקבלים מורכבים מפניה בכיוון קבוע לרודף, ואילו למתחמק פניה קבועה ולאחריה תנועה בקו ישר, השייכת לתופעה סינגולרית מטיפוס משטח אוניברסלי למתחמק. מטעמי סימטריה של גאומטריה המשחק, מתקבל גם אזור שבו לרודף קיימות שתי אופציות לבחירת הכיוון. זו סינגולריות הנקראת משטח דיספרסלי לרודף. קיים גיוון רב בסוגי התמרונים ובצורפים השונים. עבודה זו מתרכזת בפתרון עבור K (היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי) גדול מ- $\pi+2$, שעבורו ידועה תצורת המחסום המורכב. פתרון עבור $K < \pi+2$ דורש מחקר נוסף.

הפתרון המתקבל מורכב מבחינה אנליטית ונומרית.
קיים קושי להוכיח את קיומו, באופן אנליטי, על פני כל התחום $K \geq \pi + 2$.
יחד עם זאת, פתרון נומרי אפשרי, עבור כל מקרה ספציפי, באמצעות תוכנית
מחשב שפותחה לצורך כך.

רשימת סמלים

A - פונקצית המיתוג של P.

\hat{e} - וקטור בסיס על המטרה.

a,b,c,d - אזורי אסטרטגיה.

$F_C(\cdot)$ - משוואת המטרה.

$f(\cdot)$ - וקטור המהירות.

$H(\cdot)$ - המילטוניין.

K - רדיוס התצפית, או היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי.

$L(\cdot)$ - אינטגרנד התמורה.

M_0 - פונקציה על תנאי התחלה במשחק הדרגה.

R - רדיוס הפניה המינימלי של השחקנים.

R^n - מרחב אוקלידי n - ממדי.

s_1, s_2 - תנאי התחלה פרמטריים.

σ_1 - הבקרה האופטימלית של P.

σ_2 - הבקרה האופטימלית של E.

$\text{sgn}(\cdot)$ - פונקצית הסימן.

$T(\cdot)$ - הערך.

T_f - הזמן לסיום המשחק.

$T_f(\cdot)$ - תמורה.

∇T - גרדיאנט הערך.

(T_x, T_y, T_ψ) - רכיבי גרדיאנט הערך בקואורדינטות קרטזיות.

(T_r, T_θ, T_ψ) - רכיבי גרדיאנט הערך בקואורדינטות פולריות.

∇T_0 - הערך ההתחלתי של גרדיאנט הערך.

t - זמן רגיל.

רשימת סמלים (המשך)

-
- τ - זמן בסוג.
 - τ_t - הזמן הכולל לסיום המשחק.
 - τ_1 - זמן התחלתי על משטח אוניברסלי.
 - u - הבקרה של P .
 - v - הבקרה של E .
 - U, V - מרחב הבקרה של P ו- E בהתאמה.
 - u^*, v^* - אסטרטגיה אופטימלית, של P ו- E בהתאמה.
 - X - וקטור המצב.
 - X_0 - וקטור המצב ההתחלתי.
 - X_C - וקטור המצב על המטרה.
 - (x, y, ψ) - משתני המצב במערכת קרטזית.
 - (r, θ, ψ) - משתני המצב במערכת פולרית.
 - W - המהירות, בערך מוחלט, של השחקנים.

אינדקסים

-
- P - של הרודף.
 - E - של המתחמק.
 - 0 - ערך התחלתי.
 - C - ערך על המטרה.
 - $*$ - ערך אופטימלי.
 - $+$ - של אזור ימין.
 - $-$ - של אזור שמאל.
 - i - אינדקס כללי.
 - ε - שייך ל...

רשימת סמלים (המשך)

- . {} - קבוצה.
- . t - נגזרת לפי זמן רגיל t.
- . T - נגזרת לפי זמן נסוג T.

רשימת מונחים וקיצורים בעברית ובאנגלית

	Zero-Sum differential game	משחק דיפרנציאלי בעל סכום אפס
	Partie	משחק (במובן מהלך)
	Player	שחקן
P	Pursuer	רודף (צופה)
E	Evader	מתחמק
	Game space	מרחב המשחק
S	State space	מרחב מצב
	Realistic space	מרחב אמיתי
C	Game termination (Boundary)	מטרת (גבול) המשחק
GOK	Game of Kind	משחק הסוג
GOD	Game of Degree	משחק הדרגה
	Surveillance-evasion	התחמקות מתצפית
	Control	בקרה
	Strategy	אסטרטגיה
	Payoff	תמורה
	The Value	הערך
ME	Main equation	משוואה עקרית
KE	Kinematic equations	משוואות התנועה
	Adjoint equations	המשוואות הצמודות
	Retrograde time	זמן נסוג
UP	Useable part	חלק שימושי
NUP	Non-useable part	חלק לא שימושי
BUP	Boundary of useable part	גבול החלק השימושי

רשימת מונחים וקיצורים בעברית ובאנגלית (המשך)

B	Barrier	מחסום
CZ	Capture (Surveillance) zone	אזור תפיסה (תצפית)
EZ	Evasion zone	אזור התחמקות
EUS	Evader's universal surface	משטח אוניברסלי למתחמק
PDS	Pursuer's dispersal surface	משטח דיספרסלי לרודף
SPS	Semi-permeable surface	משטח חצי חדיר
	Trajectory, Tributary, Path	מסלול
	Isochrone, Isovalue	איזוכרונה, קו שווה ערך

מילות מפתח

Differential games

Surveillance-evasion

Two identical cars

Game of Kind

Game of Degree

משחקים דיפרנציאליים

התחמקות מתצפית

שתי מכוניות זהות

משחק הסוג

משחק הדרגה

פרק 1: מבוא

מחקר זה עוסק במשחק דיפרנציאלי של התחמקות מתצפית במודל שתי המכונות הזהות, בגרסת משחק הדרגה (Game of Degree).

המחקר מהווה המשך למחקר קודם של גרינפלד [16] שעסק בפתרון משחק הסוג (Game of Kind) של אותו מודל. באותו מחקר אופיין המחסום, המפריד בין אזור התחמקות לאזור תפיסה במרחב המשחק, בתחום מסוים של פרמטרים שבו היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי (K) גדול או שווה ל- $2+\pi$.

מטרת מחקר זה להציג פתרון של משחק הדרגה עבור אותו תחום פרמטרי, כולל הגדרת האסטרטגיות האופטימליות לכל שחקן, ומסלולי התנועה הנובעים מהן, בתוך אזור ההתחמקות. כמו כן מוצג פתרון נומרי מלא של דוגמא אופיינית. סקר ספרות, הרקע התאורטי והתאור הבסיסי של הבעיה מוצגים ומוסברים במפורט במקור [16]. בדו"ח זה, בפרק השני ובפרק השלישי מוצגים [על בסיס [16]] הבעיה, תשתית ההגדרות, הקינמטיקה והפתרונות הכלליים של המשוואות הדיפרנציאליות עבור ערכים שונים של הבקרות. בפרק הרביעי מוצג פתרון משחק הדרגה, הכולל את גאומטריית המסלולים והמשטחים הסינגולריים, באופן איכותי וכמותי, כולל דוגמא מספרית. בנספח לעבודה מתוארת שיטת הפתרון הנומרי של משחק הדרגה ותוכנית המחשב הנילוויית אליה.

פרק 2: הצגת בעיית ההתחמקות מתצפית

פרק זה מבוסס על פרק 2 ב-[16]. מספרי המשוואות תואמים את המספרים שם, ולכן אינם תמיד רצופים.

2.1 מבוא

בפרק זה נציג וננסח את בעיית ההתחמקות מתצפית במשחק שתי המכוניות הזרות.

שני עצמים (שחקנים), דוגמת אוניות או מכוניות, נעים במרחב אמיתי (Realistic Space) דו-ממדי. לשניהם דינמיקה זהה, הכוללת מהירות (בערך מוחלט) קבועה, ויכולת פניה, תחת מגבלת רדיוס פניה מינימלי. בקרתו של כל שחקן שולטת על קצב הפניה בלבד. בכל רגע, לכל שחקן יש מידע מלא על מצב המשחק, דהיינו על מיקומו ומיקום יריבו, אך אין לו מידע על בקרתו הרגעית של היריב.

השחקן האחד, שיכונה הרודף (הצופה), נושא אמצעי תצפית (מכ"מ, משקפת וכו') בעל רדיוס גילוי מקסימלי נתון. השחקן השני, שיכונה המתחמק, נמצא בתחילת המשחק בתוך אזור התצפית של הרודף, או על גבול אזור זה, והוא שואף להתחמק ממנו במינימום זמן. יריבו הרודף ישאף למנוע את התחמקותו כליל, או לחליפין - אם אין ביכולתו למנוע זאת - ישאף להשהות את המתחמק תחת תצפיתו למשך מקסימום זמן.

במהלך משחק ינוע המצב לאורך מסלול, שמהלכו יקבע ע"י המצב ההתחלתי ורצף ההחלטות (הבקרות) של כל שחקן. שחקן יכול לבחור מראש להשתמש באסטרטגיה, המגדירה את בקרתו בכל מצב אפשרי של המשחק. בפתרון המשחק, נניח שהשחקנים משתמשים באסטרטגיות אופטימליות, כפי שתוגדרנה בהמשך.

נבדיל בין שתי גירסאות של המשחק:

משחק הסוג (Game of Kind) - שבו נחפש אזורי התחמקות ותפיסה במרחב המשחק, ואת המחסום המפריד ביניהם.

משחק הדרגה (Game of Degree) - שבו נתווה מסלולים אופטימליים באזור ההתחמקות.

מחקר זה מתמקד, כאמור, במשחק הדרגה.

שני המשחקים עומדים כל אחד בפני עצמו. פתרון מאפשר כיסוי מלא של כל המרחב הרלוונטי באסטרטגיות אופטימליות. פרק זה כולל את הניסוח הפורמלי המתמטי של הבעיה, בסיוע ISAACS [4] ולוין [15]. הפרק כולל הגדרות יסוד, מערכות צירים, הגדרת מרחב המשחק וגבולותיו, ומשוואות התנועה.

2.2 הגדרות

יהיו השחקנים:

P השחקן הרודף (הצופה).

E השחקן המתחמק.

יהי $S, S \in \mathbb{R}^n$, מרחב המצב של המשחק. \mathbb{R}^n הוא מרחב אוקלידי n ממדי. המימד n יקבע לפי מערכת הקואורדינטות שבשימוש.

יהי $X, X \in S$, וקטור המצב של המשחק.

יהי $C, C \in S$, גבול המשחק, או משטח המטרה של המשחק.

תהיינה: u הבקרה של P ו- v הבקרה של E .

$$\begin{aligned} u \in U, \quad |u| \leq 1 \\ v \in V, \quad |v| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

כאשר U ו- V הם מרחבי הבקרה של P ו- E בהתאמה.

יהיו:

W המהירות, בערך מוחלט, של השחקנים.

R רדיוס הפניה המינימלי של השחקנים.

Wu/R קצב הפניה של P .

Wv/R קצב הפניה של E .

K רדיוס התצפית של P .

יצויין שבקרות השחקנים שולטות על קצבי הפניה בלבד, ואילו המהירות בערכה המוחלט נשארת קבועה.

יהי t משתנה הזמן הרגיל. נשתמש גם במשתנה הזמן הנסוג τ .

הקשר בין שניהם:

$$\tau = T_f - t \quad (2.2)$$

כאשר T_f הוא הזמן עד לסייום המשחק.
נסמן ב- \dot{x} נגזרת של משתנה כלשהוא x לפי הזמן הנסוג τ .

$$\dot{x} \equiv dx/d\tau \quad (2.3)$$

$$\ddot{x} \equiv -\dot{x} \quad (2.4)$$

יהי $X_0 \in S$, X_0 תנאי ההתחלה של מצב המשחק. תנאי ההתחלה יבוטאו בדרך כלל בזמן הנסוג $(\tau=0)$.

2.3 מערכות הצירים

קיימת חשיבות רק למצב היחסי שבין השחקנים.
ציור 2.1 מציג 2 מערכות צירים, הצמודות לוקטור המהירות של P במרחב היחסי.

מערכת קרטזית (x, y) בעלת וקטור המצב:

$$X \equiv (x, y, \psi)$$

מערכת פולרית (r, θ) בעלת וקטור המצב:

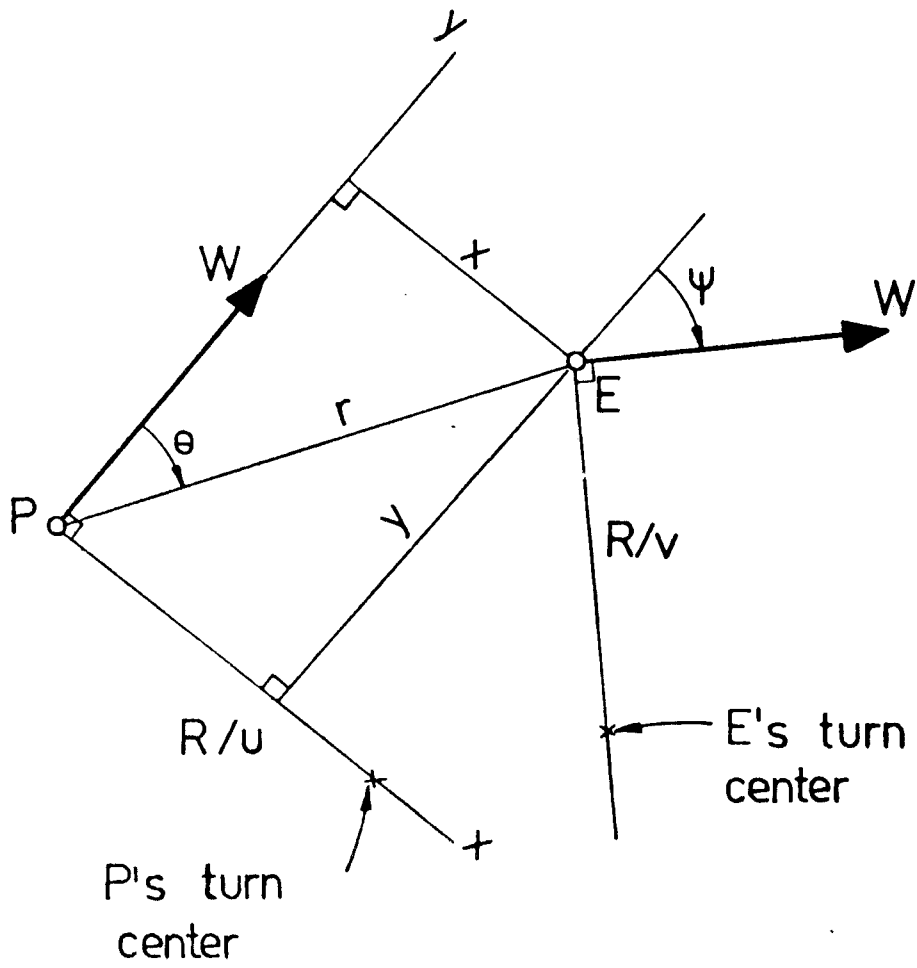
$$X \equiv (r, \theta, \psi)$$

בעבודה זו נשתמש בעיקר במערכת הקרטזית.

2.4 מרחב המשחק

ציור 2.2 מתאר את מרחב המשחק במערכות היחסיות, הקרטזית והפולרית.
מצוירת נקודה X כלשהיא בתוך המרחב S , ומוגדרות הקואורדינטות שלה בשתי המערכות.

מרחב המשחק הוא גליל, שרדיוסו K , וציר הסימטריה שלו ψ .



ציור 2.1: מערכות צירים במשחק שתי מכוניות זהות.

Fig. 2.1: Coordinate systems in the game of two identical cars.

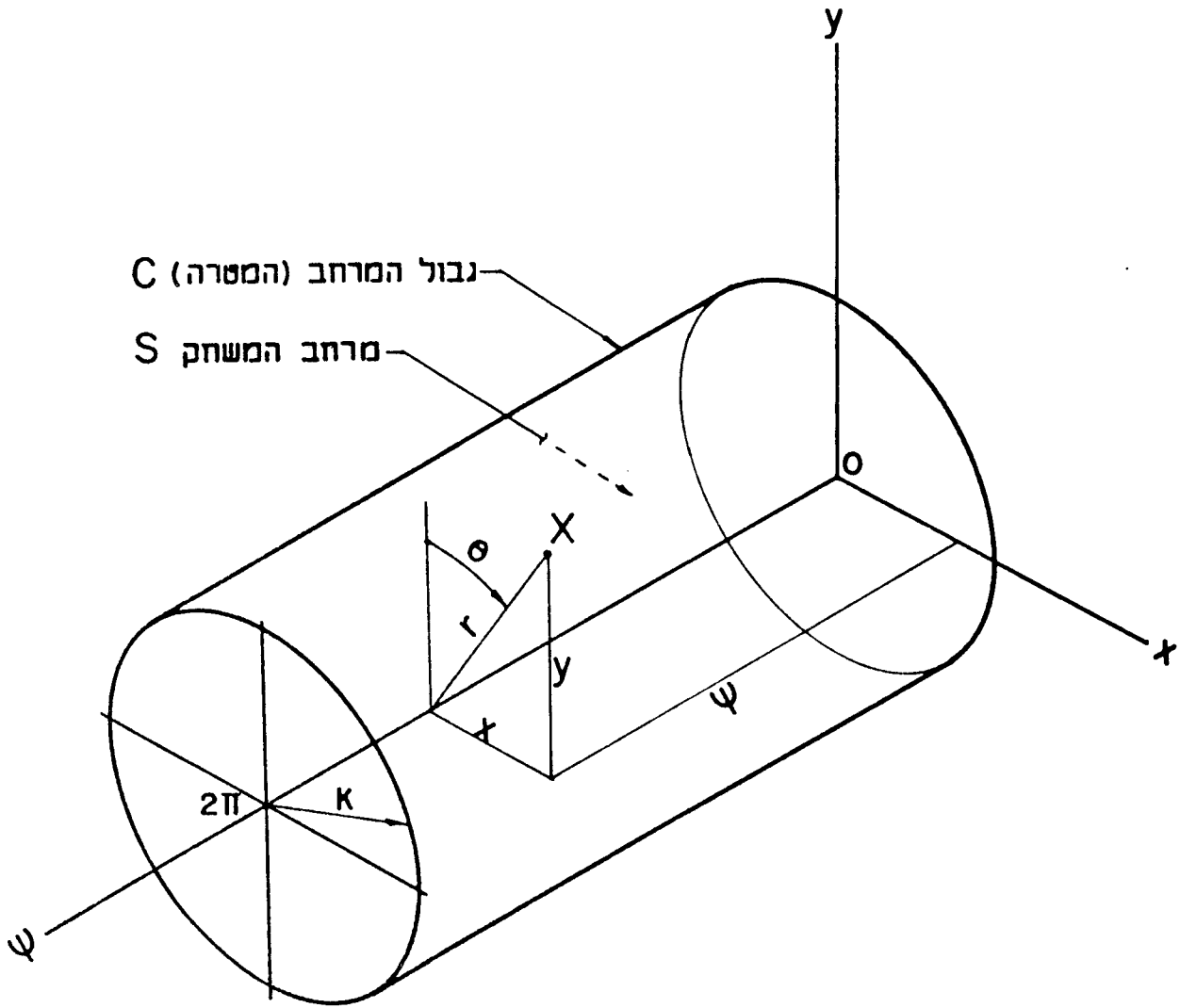


Fig. 2.2: The game space.

ציר 2.2: מרחב המשחק.

גבול מרחב המשחק הוא C ומשוואתו:

$$F_C \equiv x_C^2 + y_C^2 - K^2 = 0 \quad \text{קרטזית:} \quad (2.5)$$

$$F_C \equiv r_C - K = 0 \quad \text{פולרית:}$$

$$2\pi > \psi > 0 \quad \text{או} \quad \pi > \psi > -\pi$$

2.5 משוואות התנועה

נציג את משוואות התנועה של דינמיקת שתי מכוניות זהות, בצורתן המנורמלת (חסרת המימד). הנרמול נעשה ע"י הצבת $W=R=1$ במשוואות המלאות. משוואות התנועה בצורתן הכללית:

$$\dot{X} = f(X, u, v) \quad (2.6)$$

משוואות התנועה המנורמלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin\psi - uy \\ \dot{y} &= \cos\psi - 1 + ux \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{\psi} = v - u$$

משוואות התנועה המנורמלות בקואורדינטות פולריות:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos(\psi - \theta) - \cos\theta \\ \dot{\theta} &= -u + (\sin\theta + \sin(\psi - \theta)) / r \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\dot{\psi} = v - u$$

הנרמול בעשה ללא אובדן אינפורמציה. ניתן לראות שמשוואות התנועה אינן כוללות כל פרמטר. הפרמטר היחיד שנותר בבעיה הוא K (היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי) המופיע במשוואת המטרה (2.5).

2.6 הגדרת המשחק

נגדיר בנפרד את משחק הסוג ומשחק הדרגה. פתרונו של האחד אינו מותנה בפתרונו של השני.

2.6.1 משחק הסוג (Game of Kind)

תהי מטרת P תפיסה (תצפית) ומטרת E התחמקות מתצפית. יהי אזור ההתחמקות EZ אוסף כל נקודות ההתחלה X_0 שמהן E יכול להבטיח לעצמו התחמקות תוך פרק זמן סופי. יהי אזור התפיסה CZ האזור המשלים ל-EZ. יהי המחסום B משטח הגבול המפריד בין CZ ל-EZ. המחסום הוא משטח חצי חדיר (SPS, על פי ISAACS). תהיינה u^* ו- v^* האסטרטגיות האופטימליות של P ו-E בהתאמה, על פני המחסום. נקיטת אסטרטגיה אופטימלית מבטיחה לשחקן אי חדירה לאזור של יריבו. אסטרטגיות אלו תכוננה אסטרטגיות המחסום. פתרון משחק הסוג מתמקד בבניית המחסום כמשטח חצי חדיר מורכב, סגור ולא נוזל, על פי שיטתו של ISAACS, והתווית אסטרטגיות המחסום ומסלולי המחסום.

2.6.2 משחק הדרגה (Game of Degree)

משחק הדרגה מוגדר בתוך אזור ההתחמקות EZ. תהי מטרת P תפיסה (תצפית) למשך זמן מקסימלי, ומטרת E התחמקות מתצפית תוך משך זמן מינימלי.

תהי תמורת (Payoff) המשחק, $T_f(\cdot)$, משך המשחק עד לגמר:

$$T_f(X_0, u(t), v(t)) = \int_0^{T_f} 1 dt = T_f \quad (2.23)$$

תהיינה u^* ו- v^* האסטרטגיות האופטימליות של P ו-E בהתאמה. סטייה של שחקן מהאסטרטגיה האופטימלית שלו לא תביא לו יתרון. האסטרטגיות האופטימליות מוגדרות ע"י אי שיויון האוכף:

$$T_f(X_0, u, v^*) \leq T(X_0) \leq T_f(X_0, u^*, v) \quad (2.24)$$

כאשר $T(X_0)$ הוא הערך (Value) של המשחק, המוגדר ע"י:

$$T(X_0) \triangleq \min_{v \in V} \max_{u \in U} T_f(X_0, u, v) = T_f(X_0, u^*, v^*) \quad (2.25)$$

פתרון משחק הדרגה מתמקד במציאת האסטרטגיות האופטימליות באזור ההתחמקות, על פי שיטתו של ISAACS, והתויית המסלולים האופטימליים.

2.7 החלק השימושי

נגדיר את מהותו של גמר המשחק ונזהה על המטרה אזורים שבהם יש או אין גמר (התחמקות) וגבולותיהם.

נכנה את האיזורים בשמות הבאים (על פי ISAACS):

- UP - Useable Part (החלק השימושי (גמר))
- NUP - Non-Useable Part (החלק הלא-שימושי (אי-גמר))
- BUP - Boundary of Useable Part (גבול החלק השימושי (השקה))

נגדיר את ה-BUP על המטרה, בעזרת (2.13):

$$r_0^\circ = -\cos(\psi_0 - \theta_0) + \cos\theta_0 = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 2\theta_0 \\ r_0 &= K \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\psi_0 = 0$$

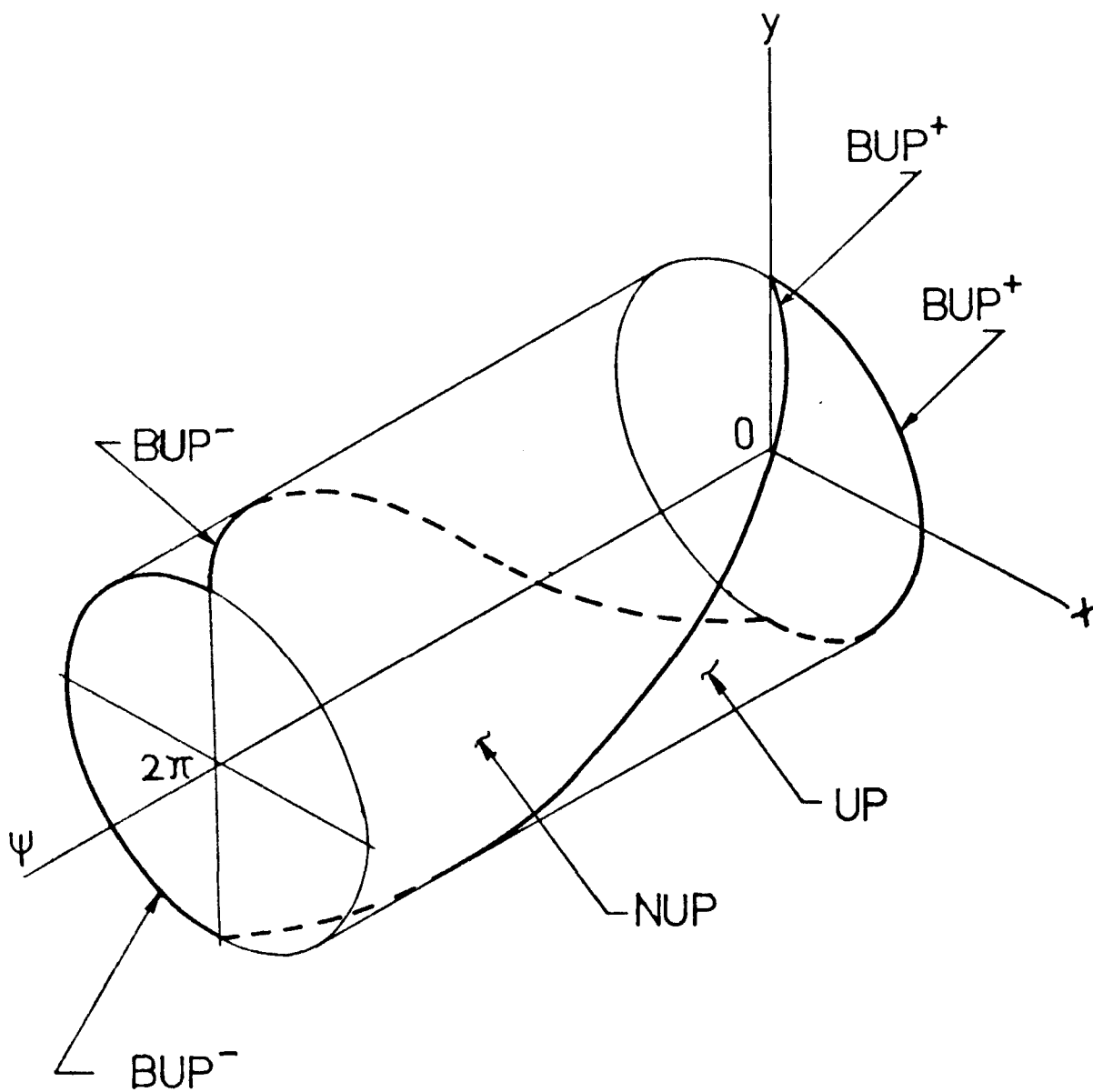
(4.2) לעיל הן משוואות ה-BUPS. הראשונה היא משוואת לולין והשניה משוואת עגול. האינדקס (0) מסמן תנאי התחלה נסוגים ($\tau=0$). החלק השימושי UP יהיה:

$$\begin{aligned} r_0^\circ &= -\cos(\psi_0 - \theta_0) + \cos\theta_0 < 0 \\ \psi_0 &< 2\theta_0, \quad \psi_0 > 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\psi_0 > 2\theta_0, \quad \psi_0 < 0$$

החלק הלא-שימושי יהיה המשלים של (4.3) לעיל. ראה תיאור מלא בצירור 2.3.

בציור, (+) מסמן צד ימין ($\theta < \pi$) ו-(-) מסמן צד שמאל ($\theta > \pi$).



ציור 2.3: החלק השימושי וגבולותיו.

Fig. 2.3: The useable part and its boundaries.

פרק 3: פתרונות כלליים למשוואות המסלול

פרק זה מבוסס על פרק 3 ב-[16]. מספרי המשוואות תואמים למספרים שם, ולכן אינם תמיד רצופים.

3.1 מבוא

פרק זה מציג את הפתרונות הכלליים למשוואות המסלול. הבסיס התאורטי מתוך ISAACS [4] ולוין [15]. מוגדרים תנאים הכרחיים לקיום אופטימום, המבוססים על משוואות ISAACS. התנאי הראשון הוא תנאי נקודת האוכף (Saddle-Point), אשר, יחד עם מגבלות הבקרה, מספק מועמדים לאסטרטגיות אופטימליות. בהנחת קיום אסטרטגיות אופטימליות התנאי השני הוא המשוואות הצמודות, אשר, יחד עם משוואות התנועה (האילווצים), מהוות מערכת של משוואות דיפרנציאליות רגילות לא-לינאריות מסדר ראשון עם תנאי התחלה. תנאי ההתחלה נתונים בנקודת הסיום בזמן אמיתי, ולכן המשוואות מוצגות בזמן נסוג. הפתרון של המשוואות נעשה ע"י אינטגרציה לאחור. המשוואות מבוססות על הנחות אחדות של קיום ורציפות, שעליהן להבדק גלובלית עם השלמת פתרון סגור למלוא מרחב המשחק. מאחר שהבקורות האופטימליות מתקבלות כבקורות קיצון התלויות בפונקציות מיתוג, קיים קושי לפתור את המשוואות הדיפרנציאליות על פני אזורי אי-רציפות בבקורות, ולכן נדרוש עבורם תנאים הכרחיים מיוחדים.

3.2 הבקורות האופטימליות והמשוואות הצמודות

3.2.1 הניסוח התאורטי

יהי ההמילטוניין H פונקציה סקלרית המוגדרת:

$$H(X, \nabla T, u, v) \equiv \nabla T \cdot f(X, u, v) + L(X, u, v) \quad (3.1)$$

כאשר:

∇T גרדיאנט הערך של המשחק.

$L(\cdot)$ אינטגרנד התמורה.

$f(\cdot)$ וקטור המהירות לפי (2.6).

תנאי הכרחי ראשון לאופטימליות הוא המשוואה העיקרית הראשונה ME1 לפי ISAACS, המתארת נקודת אוכף:

$$\min_{v \in V} \max_{u \in U} H(X, \nabla T, u, v) = 0 \quad (3.2)$$

תהיינה, u^*, v^* מועמדות (Candidates) לאסטרטגיות אופטימליות המקיימות את ME1 (3.2). הן תקיימנה גם את המשוואה העיקרית השניה ME2 לפי ISAACS:

$$H^* \equiv H(X, \nabla T, u^*, v^*) = 0 \quad (3.3)$$

תנאי הכרחי שני לאופטימליות הוא המשוואות הצמודות:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\nabla T) &= - \frac{\partial}{\partial X} H(X, \nabla T, u^*, v^*) = \\ &= - \nabla T \frac{\partial}{\partial X} f(X, u^*, v^*) - \frac{\partial}{\partial X} L(X, u^*, v^*) \end{aligned} \quad (3.4)$$

שני התנאים האחרונים, (3.3) ו-(3.4), מתקיימים לאורך מסלולים אופטימליים.

התנאים שלעיל משתמשים בהנחות הבאות:

1. קיום ורציפות של הנגזרות המופיעות במשוואות (3.1-3.4) לאורך קטעים של מסלול אופטימלי:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial X}, \frac{\partial L(\cdot)}{\partial X}, \nabla T, \frac{d}{dt} (\nabla T)$$

2. קיום אסטרטגיות אופטימליות במובן אי שויון האוכף (2.24), להבדיל מהמועמדים לאסטרטגיות אופטימליות, וקיום מסלולים אופטימליים שכנים.
 3. קיום רציפות בבקורות לאורך קטעים של מסלול אופטימלי.
- הנחות אלו יבדקו לקיום במהלך הפיתוח.

3.2.2 משחק הדרגה

בבעיה שלנו גרדיאנט הערך יוגדר:

$$\nabla T \equiv (T_x, T_y, T_\psi), \quad T_{x_i} \equiv \partial T / \partial x_i \quad (3.5)$$

אינטגרנד התמורה הוא (ראה 2.23):

$$L(X, u, v) = I \quad (3.6)$$

נציב את משוואות התנועה (2.12) ואת אינטגרנד התמורה (3.6) למשוואת ההמילטוניין (3.1):

$$H(X, \nabla T, u, v) = T_x \dot{x} + T_y \dot{y} + T_\psi \dot{\psi} + I = \quad (3.7)$$

$$= uA + vT_\psi + T_x \sin\psi + T_y \cos\psi - T_y + I$$

כאשר הפונקציה A היא:

$$A \equiv xT_y - yT_x - T_\psi \quad \text{בקואורדינטות קרטזיות} \quad (3.8)$$

$$A \equiv -T_\theta - T_\psi \quad \text{בקואורדינטות פולריות}$$

מאחר שקיימת ספרביליות בין משתני הבקרה, ניתן לבצע את האופטימיזציה על u ו-v לחוד.

המועמדים לאסטרטגיות אופטימליות, מהמשוואה MEI (3.2), ובעזרת מגבלות הבקרה (2.1), יהיו:

$$u^* = \text{sgn} A \equiv \sigma_1 \quad (3.9)$$

$$v^* = \text{sgn} (-T_\psi) \equiv \sigma_2$$

כאשר:

$\text{sgn}(\cdot)$ היא פונקציית הסימן, המקיימת:

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$.

A היא פונקצית המיתוג של P.

T_ψ היא פונקצית המיתוג של E.

הבקרות σ_1 ו- σ_2 המתקבלות הן בקרות קיצון.

בהמשך נראה, שקיים מצב שבו פונקצית המיתוג של E, T_ψ , מתאפסת, והבקרה σ_2 לכן אינה מוגדרת. במקרה זה נצטרך להפעיל תנאים הכרחיים

מקומיים מיוחדים - ראה נספח אי ב-[16], ונקבל ש- $\sigma_2=0$.

תופעה זו שייכת למשטח סינגולרי מטיפוס משטח אוניברסלי

(Universal Surface), על פי ISAACS.

נסכם את הערכים של הבקרות הצפויות במשחק זה (סה"כ 6 צירופים של

צמדי בקרה (σ_1, σ_2)):

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.11)$$

$$\sigma_2 = \pm 1, 0$$

לאורך מסלול אופטימלי מתקיימת ME2 (3.3). נציב לתוכה את האסטרטגיות

המועמדות (3.9):

$$H^* = H(X, \nabla T, u^*, v^*) = |A| - |T_\psi| + \quad (3.12)$$

$$+T_x \sin\psi + T_y \cos\psi - T_\psi + 1 = 0$$

לאורך מסלול אופטימלי תתקיימנה גם המשוואות הצמודות (3.4).

נפתח אותן בעזרת (3.12):

$$\dot{T}_x = - \frac{\partial H^*}{\partial x} = -\sigma_1 T_y$$

$$\dot{T}_y = - \frac{\partial H^*}{\partial y} = \sigma_1 T_x \quad (3.13)$$

$$\dot{T}_\psi = - \frac{\partial H^*}{\partial \psi} = -T_x \cos\psi + T_y \sin\psi$$

המשוואות הצמודות תשמשנה אותנו לחישוב פונקציות המיתוג A ו- T_ψ .

3.3 המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי

נרכז את המשוואות הדיפרנציאליות לאורך קטעים במסלול אופטימלי. נעבור לזמן נסוג בעזרת הקשר (2.4), ונציב את הבקורות האופטימליות מתוך (3.9). משוואות התנועה הנסוגות (מתוך (2.12)):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sin\psi + \sigma_1 y \\ \dot{y} &= -\cos\psi + 1 - \sigma_1 x \\ \dot{\psi} &= \sigma_1 - \sigma_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

המשוואות הצמודות הנסוגות (מתוך (3.13)):

$$\begin{aligned} \dot{T}_x &= \sigma_1 T_y \\ \dot{T}_y &= -\sigma_1 T_x \\ \dot{T}_\psi &= T_x \cos\psi - T_y \sin\psi \end{aligned} \quad (3.18)$$

תנאי ההתחלה ב- $\tau=0$ עבור נקודת התחלה (בזמן נסוג) כלשהיא במרחב המשחק (לאו דוקא על המטרה):

$$X(0) = X_0 \equiv (x_0, y_0, \psi_0) \quad (3.19)$$

$$\nabla T(0) = \nabla T_0 \equiv (T_{x_0}, T_{y_0}, T_{\psi_0})$$

תנאי התחלה לנגזרות הראשונות ניתן לקבל עיני הצבת (3.19) לתוך (3.17) ו-(3.18).

הערה: תנאי ההתחלה כאן הם במובן הזמן הנסוג, ולמעשה הם תנאי סיום בזמן אמיתי.

ניתן לקבל צורה קומפקטית יותר של פתרונות המשוואות עיני שימוש בפרמטרים עבור תנאי ההתחלה. נגדיר את הפרמטרים הבאים:

$$(r_0, \theta_0, \psi_0) \quad \text{עבור וקטור המצב:}$$

$$X_0 = (r_0 \sin \theta_0, r_0 \cos \theta_0, \psi_0) \quad (3.20)$$

$$(s_1, s_2, T_{\psi_0}) \quad \text{עבור גרדיאנט הערך:}$$

$$\nabla T_0 = (s_1 \sin s_2, s_1 \cos s_2, T_{\psi_0}) \quad (3.21)$$

(3.21) מקיימת את הקשר (B.12) בנספח ב' ב-[16], כנדרש. מערכת המשוואות המתקבלת, היא מערכת של 6 משוואות דיפרנציאליות רגילות לא-לינאריות מסדר ראשון עם 6 תנאי התחלה. פתרון ע"י אינטגרציה לאחור עם תנאי התחלה ב- $\tau=0$.

3.4 משוואות המסלול האופטימלי - רכוז הפתרונות

בסעיף זה מרוכזות כל משוואות המסלול, הכוללות את וקטור המצב, גרדיאנט הערך, הבקרות האופטימליות ופונקציות המיתוג לאורך קטעים רציפים של מסלול אופטימלי. הפתוח המפורט של הפתרון מובא בנספח ב', ב-[16]. תנאי ההתחלה מוצגים בצורה פרמטרית. מובאים שני מקרים - בקרות קיצון ובקרת אפט ל-E.

3.4.1 משוואות המסלול עבור בקרות קיצון

המשוואות בסעיף זה נכונות לבקרות הבאות:

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.22)$$

$$\sigma_2 = \pm 1$$

וקטור המצב X:

$$x = r_0 \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 (1 - \cos \tau) + \sigma_2 [\cos(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \psi] \quad (3.23)$$

$$y=r_0\cos(\theta_0+\sigma_1\tau)+s_1\tau-$$
$$-\sigma_2[\sin(\psi_0+\sigma_1\tau)-\sin\psi]$$

$$\psi=\psi_0+(\sigma_1-\sigma_2)\tau$$

גרדיאנט הערך ∇T :

$$T_x=s_1\sin(s_2+\sigma_1\tau)$$

$$T_y=s_1\cos(s_2+\sigma_1\tau) \quad (3.24)$$

$$T_\psi=T_{\psi_0}-s_1\sigma_2[\cos(\psi_0-s_2-\sigma_2\tau)-\cos(\psi_0-s_2)]$$

הבקורות האופטימליות σ_1 ו- σ_2 :

$$\sigma_1=\text{sgn}A \quad (3.25)$$

$$\sigma_2=-\text{sgn}T_\psi$$

כאשר פונקציות המיתוג:

$$A=r_0s_1\sin(\theta_0-s_2)-T_{\psi_0}+ \quad (3.26)$$

$$+\sigma_1s_1[\cos(s_2+\sigma_1\tau)-\cos s_2]$$

ו- T_ψ מתוך (3.24).

3.4.2 משוואות המסלול עבור בקרת אפס ל-E

המשוואות בסעיף זה נכונות לבקורות הבאות:

$$\sigma_1=\pm 1 \quad (3.27)$$

• $\sigma_2=0$

וקטור המצב X:

$$x=r_0\sin(\theta_0+\sigma_1\tau)-\tau\sin\psi+\sigma_1(1-\cos\tau)$$

$$y=r_0\cos(\theta_0+\sigma_1\tau)-\tau\cos\psi+\sin\tau \quad (3.28)$$

$$\psi=\psi_0+\sigma_1\tau$$

גרדיאנט הערך ∇T :

$$T_x=s_1\sin(s_2+\sigma_1\tau)$$

$$T_y=s_1\cos(s_2+\sigma_1\tau) \quad (3.29)$$

$$T_\psi=0$$

הבקורות האופטימליות σ_1 ו- σ_2 :

$$\sigma_1=\text{sgn}A \quad (A \text{ כמו ב- (3.26)}) \quad (3.30)$$

$$\sigma_2=0$$

פרק 4 : משחק הדרגה

4.1 מבוא

פתרון משחק הדרגה מתמקד במציאת האסטרטגיות האופטימליות באזור ההתחמקות, והתויית המסלולים האופטימליים. בפרק זה נגדיר את האסטרטגיות ונתווה את המסלולים.

אזור ההתחמקות הוגדר ע"י פתרון משחק הסוג (מקור [16]). תנאי התחלה (בזמן נסוג), במשחק הדרגה, יוגדרו על החלק השימושי (UP) שעליו מסתיימים מסלולים. נזהה על החלק השימושי את האסטרטגיות ההתחלתיות באמצעות פונקציות המיתוג, ואת האזורים שבהם האסטרטגיות אינן מוגדרות, המהוים מוצא של משטח אוניברסלי למתחמק EUS (Evader Universal Surface) ומשטח דיספרסלי לרודף PDS (Pursuer Dispersal Surface).

נבנה לאחור מסלולים אופטימליים. חלקם של המסלולים מסתיים על החלק השימושי וחלקם האחר מתנקז אל שני המשטחים האוניברסליים EUS, וממשיך עליהם עד למפגש עם החלק השימושי. בבניית המסלולים מימין ומשמאל נוצר המשטח הדיפרסלי PDS, שממנו נובעים זוגות מסלולים שוי ערך (= הזמן לסיום).

התמרונים האופיניים המתקבלים במשחק זה כוללים פניות לשני השחקנים, ולפעמים גם תנועה על קו ישר למתחמק, עד לגמר.

בגלל הממדיות הגבוהה של משחק הדרגה (בהשוואה למשחק הסוג), המחייבת מילוי מרחב תלת-ממדי במסלולים, ועקב הגיוון בצורות הגמר (על UP או על EUS), הפתרון הנומרי של המשחק, והצגת התוצאות, מורכבים. קשה גם להוכיח אנליטית אי-קיום מיתוגים במרחב המשחק. לפיכך, התמקדתי בהצגת פתרון מלא של מקרה אחד ($K=6$), במרחב המצב ובמרחב האמיתי. התנהגות הפתרון במקרה $K=6$ נותנת מקום לשער שאופי הפתרון יהיה דומה עבור כל התחום $K \geq \pi + 2$, שעבורו פותח המחסום ב-[16]. חלקו האחר של התחום הפרמטרי לא טופל בעבודה זו.

4.2 תנאי התחלה

מהחלק השימושי UP נובעים, בזמן נסוג, מסלולים אופטימליים. לפיכך נדרשת הגדרת תנאי התחלה למסלולים אלה עליו. לא נדרשת הגדרה דומה על החלק הלא שימושי NUP, אף שמקצתו שייך לאזור ההתחמקות EZ, מאחר שממנו לא יוצאים מסלולים בזמן נסוג. תנאי ההתחלה של וקטור המצב על המטרה, בעזרת (3.20):

$$X_0 \equiv (x_0, y_0, \psi_0) = (K \sin \theta_0, K \cos \theta_0, \psi_0) \quad (4.1)$$

באופן כללי, תנאי ההתחלה של גרדיאנט הערך במשחק עם תמורה אינטגרלית:

$$\nabla T \{\hat{e}\} = 0 \quad (4.2)$$

כאשר $\{\hat{e}\}$ הוא סט של $n-1$ וקטורי בסיס בלתי תלויים, המשיקים למטרה. השויון לאפס נובע מכך שעל המטרה הערך (= הזמן לסיום) הוא אפס. מתקבל ש- ∇T ניצב למטרה, וכיוונו, כמובן, ככיוון הגידול של $T = \tau$, כלומר כלפי מרכז מרחב המשחק. לפיכך נקבל את הקשרים הבאים (ראה גם (3.8)):

$$T_{r_0} = 1/r_0^{\circ}$$

$$T_{\theta_0} = -T_{x_0} \cos \theta_0 + T_{y_0} \sin \theta_0 = 0 \quad (4.3)$$

$$T_{\psi_0} = 0$$

$$A_0 = -T_{\theta_0} - T_{\psi_0} = 0$$

פונקציות המיתוג, A ו- T_{ψ} , מתאפסות (מתחמקות) על המטרה, ולכן הבקורות האופטימליות, u^* ו- v^* , אינן מוגדרות עליה (ראה (3.9) ו-(3.10)). יחד עם זאת, מאחר שהוקטורגרות במשחק זה קמורות (ראה מקור [16]), ישנה רציפות ב- ∇T באזור המיתוג. נסתמך על תכונה זו בהמשך. נשתמש ב-ME2 (3.12) בסמוך למטרה:

$$H_0^* = |A_0| - |T_{\psi_0}| + T_{x_0} \sin \psi_0 + T_{y_0} \cos \psi_0 - T_{y_0} + 1 = 0$$

נציב את (4.3) ל-ME2 ונקבל (נעזר גם ב-(3.21)):

$$\begin{aligned} T_{x_0} &= M_0 K \sin \theta_0 & s_1 &= M_0 K \\ T_{y_0} &= M_0 K \cos \theta_0 & s_2 &= \theta_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$T_{\psi_0} = 0$$

כאשר, על ה-UP:

$$M_0 = \frac{I}{K[\cos \theta_0 - \cos(\psi_0 - \theta_0)]} = \frac{I}{Kr_0} < 0 \quad (4.5)$$

נמצא את ערכי הבקורות האופטימליות בקרבת המטרה באמצעות נגזרות פונקציות המיתוג, בעזרת (4.1), (4.4), (3.8), (3.17) ו-(3.18):

$$\dot{A} = x\dot{T}_y + x\dot{T}_y - y\dot{T}_x - y\dot{T}_x - \dot{T}_\psi = -\dot{T}_x \quad (a4.5)$$

$$\dot{A}_0 = -M_0 K \sin \theta_0 \quad (4.6)$$

$$\dot{T}_{\psi_0} = M_0 K \sin(\theta_0 - \psi_0)$$

הבקורות האופטימליות בקרבת המטרה תהינה בעזרת (4.3-4.6):

$$u^* = \sigma_1 = \operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} \dot{A}_0 = \operatorname{sgn} \sin \theta_0 \quad (4.7)$$

$$v^* = \sigma_2 = \operatorname{sgn}(-\dot{T}_\psi) = -\operatorname{sgn} \dot{T}_{\psi_0} = -\operatorname{sgn} \sin(\psi_0 - \theta_0)$$

החלפת סימנים תהיה (בהזנחת מקרים השייכים ל-NUP):

$$A=0 \rightarrow \theta_0 = \pi \quad r_0 = K \quad (4.8)$$

$$T_\psi = 0 \rightarrow \theta_0 = \psi_0$$

הבקורות האופטימליות כאשר $\psi_0 \neq \theta_0 \neq \pi$

אזורי הסימן יהיו (בהזנחת מקרים השייכים ל-NUP):

$$\sigma_1 = 1 : 0 < \theta_0 < \pi \quad (4.9)$$

$$\sigma_1 = -1 : \pi < \theta_0 < 2\pi$$

$$\sigma_2 = 1 : \psi_0 < \theta_0 < 2\pi \quad (4.10)$$

$$\sigma_2 = -1 : 0 < \theta_0 < \psi_0$$

הבקורות האופטימליות כאשר $\theta_0 = \psi_0$ או $\theta_0 = \pi$

על קוי החלפת הסימנים, הנגזרות הראשונות מתאפסות. נבדוק נגזרות שניות בעזרת (4.1), (4.4), (4.5a), (3.17), ו-(3.18):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}_0 &= -\overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{x_0} = -\sigma_1 \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{y_0} = -\sigma_1 M_0 K \cos \theta_0 = \sigma_1 M_0 K & (\theta_0 = \pi) \\ \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{\psi_0} &= \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{x_0} \cos \psi_0 - \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{x_0} \psi_0 \sin \psi_0 - \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{y_0} \sin \psi_0 - \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{y_0} \psi_0 \cos \psi_0 = \\ &= \sigma_2 M_0 K \cos(\psi_0 - \theta_0) = \sigma_2 M_0 K & (\theta_0 = \psi_0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

פונקציות המיתוג והבקורות בקרבת קוי החלפת הסימן תהינה, בעזרת (4.5):

$$u^* = \sigma_1 = \text{sgn} A = \text{sgn} \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}_0 = -\text{sgn} \sigma_1 \quad (\theta_0 = \pi) \quad (4.12)$$

$$v^* = \sigma_2 = -\text{sgn} \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{\psi} = -\text{sgn} \overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{\psi_0} = \text{sgn} \sigma_2 \quad (\theta_0 = \psi_0) \quad (4.13)$$

לפי נספח אי' במקור [16], משוואות (4.3) עם (4.13), עבור σ_2 , מאפשרות ל-E בקרבת $\psi_0 = \theta_0$ גם אסטרטגיות קיצון וגם אסטרטגיית אפס, כלומר:

$$\sigma_2 = \pm 1, 0$$

מאחר שמקרה זה מקיים את התנאי (A.10) שבנספח אי' במקור [16] $(\overset{\circ}{\overset{\circ}{T}}_{\psi} = 0)$, הרי

שבחירת $v^*=\sigma_2=0$ עבור E מצביעה על קיום משטח סינגולרי מטיפוס משטח אוניברסלי ל-EUS, (Evader Universal Surface), המתחיל על המטרה לאורך הקו הלוליני $\psi_0=\theta_0$. לעומת זאת, הבקרה σ_1 אינה עונה על דרישות נספח אי במקור [16], מאחר שאינה מאפשרת ריטוט (4.12) אינה מתקיימת עבור $\sigma_1 \neq 0$. לפיכך, הקו $\theta_0=\pi$ על המטרה אינו מקור למשטח אוניברסלי, והוא מהווה אי-רציפות מטיפוס אחר, הנוצרת בבניה לאחור של מסלולים אופטימליים.

נזהה את התופעות הסינגולריות בדרך הבאה:
נשתמש במשוואות התנועה הפולריות (2.13), עם (3.9), בקרבת המטרה:

$$\dot{\theta}_0 = -\sigma_1 + (\sin\theta_0 + \sin(\psi_0 - \theta_0)) / K$$

$$\dot{\psi}_0 = \sigma_2 - \sigma_1$$

מקרה א': $\theta_0 = \pi$

$$\dot{\theta}_0 = -\sigma_1 - \sin\psi_0 / K$$

נסמן ב- (+) את הצד $\theta_0 > \pi$, וב- (-) את הצד $\theta_0 < \pi$, ונסתייע ב-(4.7):

$$\dot{\theta}_0^+ - \dot{\theta}_0^- = -\sigma_1^+ + \sigma_1^- = 2$$

כלומר וקטורי המהירות משני צידי קו החלפת הסימן של σ_1 מתרחקים זה מזה, ולכן התופעה הסינגולרית כאן הוא מטיפוס משטח דיספרסלי ל-PDS, P (Pursuer Dispersal Surface).

מקרה ב': $\theta_0 = \psi_0$

$$\dot{\theta}_0 = -\sigma_1 + \sin\theta_0 / K$$

$$\dot{\psi}_0 = \sigma_2 - \sigma_1$$

נסמן ב- (+) את הצד $\psi_0 > \theta_0$, וב- (-) את הצד $\psi_0 < \theta_0$, ונסתייע ב-(4.7):

$$\dot{\theta}_0^+ - \dot{\theta}_0^- = -\sigma_1^+ + \sigma_1^- = 0$$

$$\dot{\psi}_0^+ - \dot{\psi}_0^- = \sigma_2^+ - \sigma_2^- = -2$$

כלומר, וקטורי המהירות משני צידי קו החלפת הסימן של σ_2 פונים זה כלפי זה, ולכן התופעה הסינגולרית כאן היא מטיפוס משטח אוניברסלי ל-E, EUS, כפי שהוצג קודם.

לסיכום, הבקורות ההתחלתיות על המטרה הן:

עבור מסלולי המשטח האוניברסלי EUS, כאשר $\theta_0 = \psi_0$:

$$\sigma_1 = \pm 1 \tag{4.14}$$

$$\sigma_2 = 0$$

עבור מסלולים המתחילים בחלק השמושי UP, כאשר $\theta_0 \neq \psi_0$:

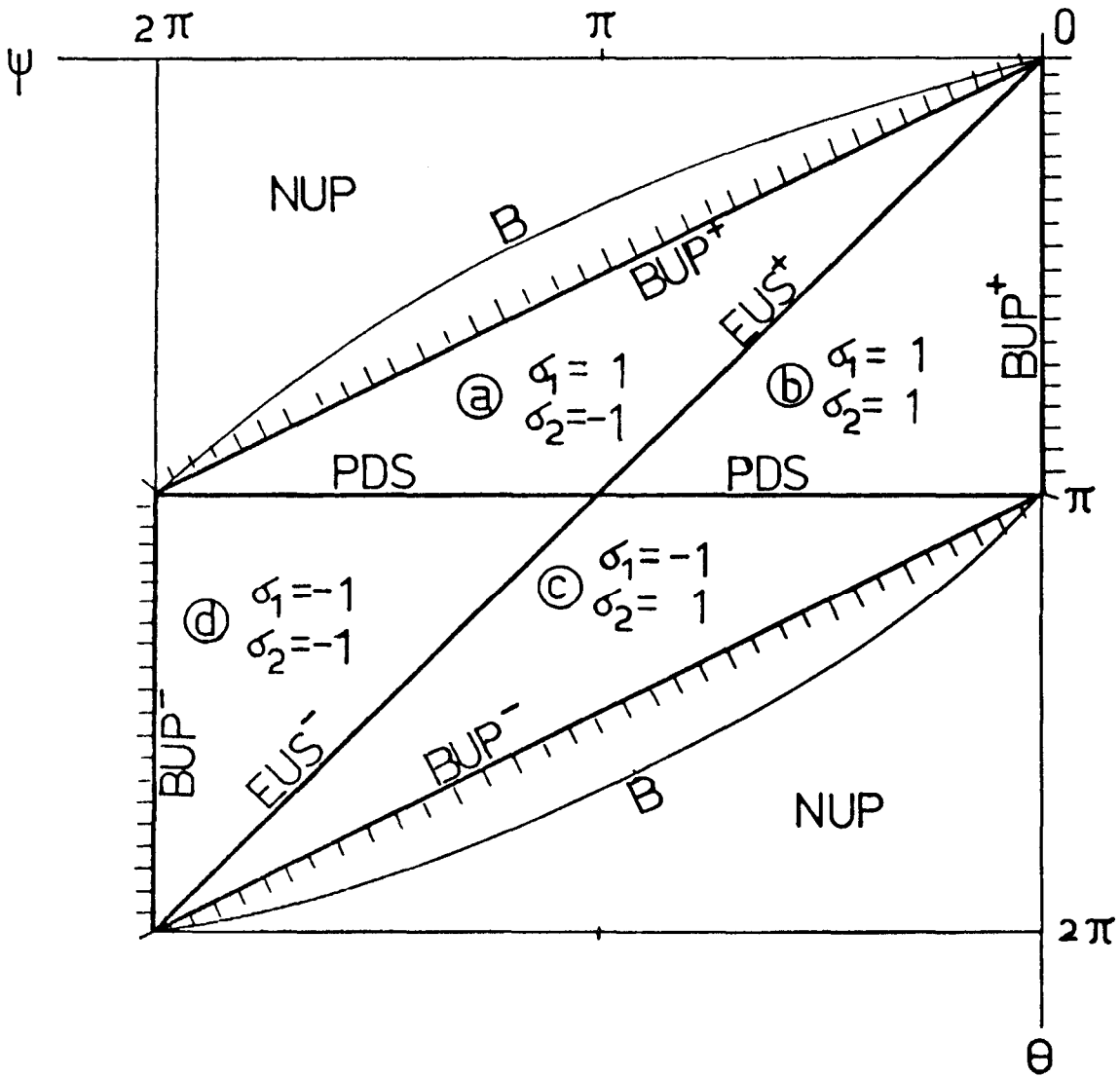
$$\sigma_1 = \pm 1 \tag{4.15}$$

$$\sigma_2 = \pm 1$$

נסכם את תוצאות סעיף זה בציר 4.1, המתאר פריסה של המטרה, ואת אזורי הסימן עם האסטרטגיות ההתחלתיות המוגדרות בהם. האזורים סומנו באותיות a, b, c, ו-d. בציר, (+) מסמן צד ימין ($\sigma_1 = 1$) ו-(-) מסמן צד שמאל ($\sigma_1 = -1$).

4.3 מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות

לפני שניכנס לפתוח המתימטי של משחק הדרגה, המסובך יותר ממשחק הסוג בגלל מימדיותו הגבוהה יותר, נציג את אופי הפתרון בצורה איכותית, ונתארו גם באמצעות תאור תמרונים במרחב האמיתי, בציר 4.2. להבדיל ממשחק הסוג, במשחק הדרגה קיימים הן מסלולים הנובעים (בזמן נסוג) מהמשטחים האוניברסליים EUS (tributaries), והן מסלולים הנובעים מהחלק השימושי UP. המשמעות של פתרון זה במונחים של המרדף הוא, שחלק מן המרדפים יסתיימו בתנועה על EUS, שבה E מסיים בתנועה בקו ישר ואילו P נמצא בעיצומה של פניה, והחלק האחר של המרדפים יסתיימו על UP, כאשר גם E וגם P נמצאים בעיצומן של פניות. ברגע הסיום, כמובן, המרחק בין P ל-E הוא K. תאור זה בהתאמה לבקורות הסופיות (בזמן אמיתי) שהוצגו ב-(4.14) וב-(4.15).



ציור 4.1: אסטרטגיות התחליות על החלק השימושי.

Fig. 4.1: Initial strategies on the useable-part.

מטעמי סימטריה סביב ציר y , ניבנים מסלולים אופטימליים, לשני סוגיהם, מימין ומשמאל, ונפגשים ביניהם בנקודות בעלות זמן שווה לסיום (= הערך) לשני הכיוונים, הנמצאות על המשטח הדיספרסלי ל-P, PDS.

דוגמאות אופיניות למרדפים

התמונות האופיניים במשחק הדרגה אנלוגיים לתמונות של משחק הסוג, כפי שהם מוצגים במקרים אי עד ז'י בציר 4.2 במקור [16], בהבדל שבמשחק הדרגה כל תמרון מסתיים בהתחמקות.

ציר 4.2 שלהלן מתאר שני תמונות אופיניים למשחק הדרגה. במקרה 1 נקודת ההתחמקות (סיום) שייכת ל-UP, ואילו במקרה 2 היא שייכת ל-EUS. במקרה 1, פונה שמאלה מ- P_1 ל- P_2 , ובמשך אותו הזמן E פונה שמאלה מ- E_1 ל- E_2 . במצב זה, כשהמרחק ביניהם הוא K, מתרחשת ההתחמקות. במקרה 2, תנועתו של E משלבת פניה שמאלה והתישרות בנקודה E_2 על הישר המשיק לרדיוס הפניה של E ועובר דרך נקודת הסיום של P, ואילו P פונה ימינה ומגיע רק עד ל- P_2 , ואז מתרחשת ההתחמקות (כאשר E הגיע לנקודה E_3).

מתקיים כאן גיוון רב יחסית של מצבים, המשלבים את המקרים אי-ד' שבציר 4.2 במקור [16], ואת המקרים 1 ו-2 של ציר 4.2 שלהלן. בהמשך, בצירים (4.10-4.12), נתאר מקרים אחדים נוספים במרחב האמיתי.

4.4 משוואות המשטח האוניברסלי EUS

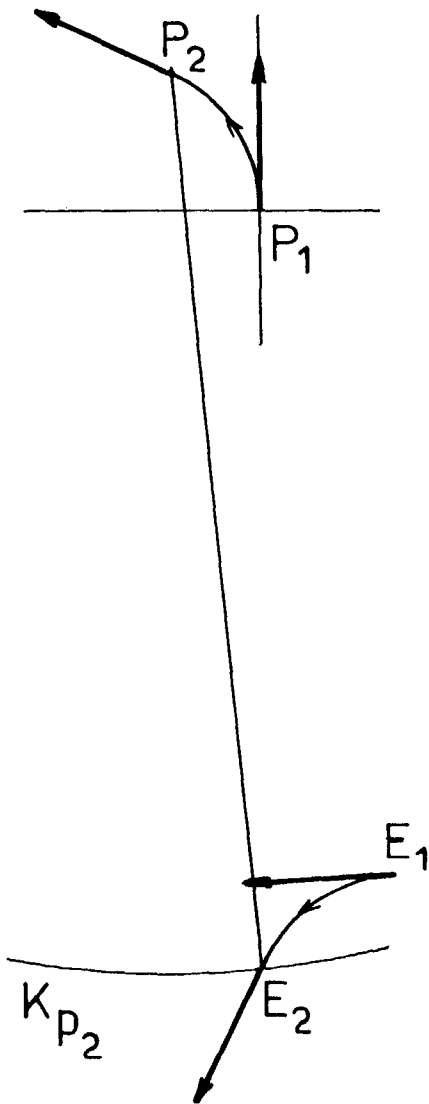
נשתמש במשוואות הכלליות של EUS (3.27-3.30) עם תנאי ההתחלה (4.1), (4.4), (4.5), (4.8) ו-(4.14), ונרשום את משוואות המשטח האוניברסלי: וקטור המצב X:

$$x=(K-\tau)\sin(\theta_0+\sigma_1\tau)+\sigma_1(1-\cos\tau)$$

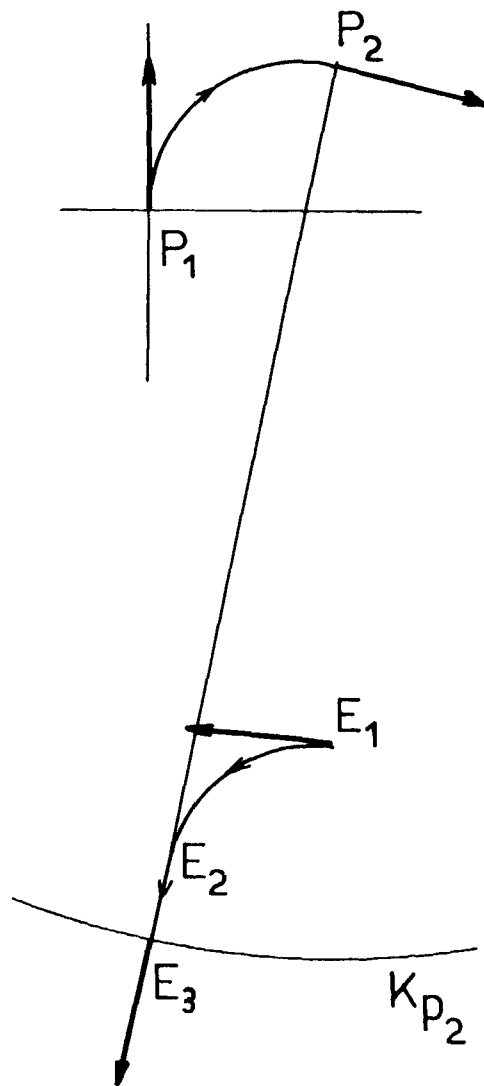
$$y=(K-\tau)\cos(\theta_0+\sigma_1\tau)+\sin\tau \quad (4.16)$$

$$\psi=\theta_0+\sigma_1\tau$$

גרדיאנט הערך ∇T :



case 1 (UP) : $u=-1 ; v=-1$



case 2 (EUS) : $u=1 ; v=-1,0$

ציור 4.2 : מסלולי Up ו-EUS אופיניים במשחק הדרגה במרחב האמיתי.

Fig. 4.2: Typical Up & EUS trajectories in the game of degree in the realistic space.

$$T_x = M_0 K \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau)$$

$$T_y = M_0 K \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) \quad (4.17)$$

$$T_\psi = 0$$

כאשר על ה-UP:

$$M_0 = \frac{1}{K(\cos\theta_0 - 1)} < 0$$

הבקורות האופטימליות:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \text{sgn} A = \text{sgn} \{ \sigma_1 M_0 K [\cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \cos\theta_0] \} = \\ &= \text{sgn} \{ \sigma_1 [\cos\theta_0 - \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau)] \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\sigma_2 = 0$$

המשוואות הן בפרמטרים θ_0 ו- τ . ניתן לחלץ את τ ממשוואת ψ , ולקבל את יתר המשוואות ב- ψ וב- θ_0 .
(4.16) היא משוואת משטח, כתוצאה מתוספת הפרמטר θ_0 שאינו מופיע במשוואות EUL (4.16) במקור [16] של משחק הסוג. אם נציב $\theta_0 = 0$, משוואת EUS מתכנסת למשוואת EUL, ופרוז הדבר, שלפחות לאורך קטעים רציפים, EUL מתקבל מחיתוך EUS עם המחסום.
עבור כל נקודת התחלה θ_0 , יבנה מסלול אופטימלי סינגולרי. לפיכך EUS הוא אוסף של מסלולים סינגולריים. קיימים שני משטחים אוניברסליים במשחק: EUS^+ ($\sigma_1 = 1$) - ימני, ו- EUS^- ($\sigma_1 = -1$) - שמאלי.
בצירים 4.4 עד 4.9 מתוארים בין היתר חתכי ψ דרך המשטחים האוניברסליים EUS^\pm .

משוואות המסלולים האופטימליים והמשטח הדיספרסלי PDS 4.5

המסלולים האופטימליים 4.5.1

כאן יהיו שני סוגי מסלולים - אלה הנובעים מ-UP (להלן - מסלולי UP) ואלה הנובעים מ-EUS (tributaries). נשתמש במשוואות הכלליות של המסלולים (3.22-3.26), וכן (B.2), (B.9) ו-(B.10) במקור [16]. תנאי ההתחלה ילקחו בהתאם למקרה: מתוך (4.1) עבור מסלולי UP ומתוך (4.16) בזמן τ_1 כלשהו עבור ה-tributaries. מסלולי UP:

$$x = K \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 (1 - \cos \tau) + \sigma_2 [\cos(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \psi] \quad (4.19)$$

$$y = K \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sin \tau - \sigma_2 [\sin(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \sin \psi]$$

$$\psi = \psi_0 + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau$$

תנאי התחלה ל-tributaries, מתוך (4.16) בזמן τ_1 :

$$x_1 = (K - \tau_1) \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau_1) + \sigma_1 (1 - \cos \tau_1) \\ y_1 = (K - \tau_1) \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau_1) + \sin \tau_1 \quad (4.20)$$

$$\psi_1 = \theta_0 + \sigma_1 \tau_1$$

נציב למשוואות הכלליות של המסלולים, ונקבל את ה-tributaries:

$$x = (K - \tau_1) \sin[\theta_0 + \sigma_1 (\tau + \tau_1)] + \sigma_1 [1 - \cos(\tau + \tau_1)] + \sigma_2 \{\cos[\theta_0 + \sigma_1 (\tau + \tau_1)] - \cos \psi\}$$

$$y=(K-\tau_1)\cos[\theta_0+\sigma_1(\tau+\tau_1)]+\sin(\tau+\tau_1) \quad (4.21)$$

$$-\sigma_2\{\sin[\theta_0+\sigma_1(\tau+\tau_1)]-\sin\psi\}$$

$$\psi=\theta_0+\sigma_1\tau_1+(\sigma_1-\sigma_2)\tau$$

הערות:

1. הגורם σ_1 זהה במשוואות המסלולים ובמשוואות תנאי ההתחלה על EUS. הגורם τ הוא הזמן עד למפגש המסלול עם EUS. הגורם θ_0 הוא נקודת התחלת UP או EUS הרלוונטי על המטרה.
2. משוואות (4.19) ו-(4.21) מתלכדות ב"תפרי" שביניהן. אם נציב $\psi_0=\theta_0$ ו- $\tau_1=0$.

נבטא את המשוואות באמצעות הזמן הכולל עד לסיום τ_t .

$$\tau_t=\tau+\tau_1 \quad (4.22)$$

נחלץ את τ_1 ממשוואות ה-tributaries ואת ψ_0 ממשוואות מסלולי UP:

$$\tau_1=-\sigma_2(\theta_0-\psi)+(1-\sigma_1\sigma_2)\tau_t \quad (4.23)$$

$$\psi_0=\psi-(\sigma_1-\sigma_2)\tau_t \quad (\tau_1=0)$$

ה-tributaries יהיו, לאחר חילוף τ_1 ובעזרת τ_t :

$$x=x(\psi, \tau_t, \theta_0)=[K+\sigma_2(\theta_0-\psi)-(1-\sigma_1\sigma_2)\tau_t]\sin(\theta_0+\sigma_1\tau_t)+\sigma_2[\cos(\theta_0+\sigma_1\tau_t)-\cos\psi]+\sigma_1(1-\cos\tau_t) \quad (4.24)$$

$$y=y(\psi, \tau_t, \theta_0)=[K+\sigma_2(\theta_0-\psi)-(1-\sigma_1\sigma_2)\tau_t]\cos(\theta_0+\sigma_1\tau_t)-\sigma_2[\sin(\theta_0+\sigma_1\tau_t)-\sin\psi]+\sin\tau_t$$

מסלולי UP יהיו, לאחר חילוף ψ_0 ובעזרת τ_t :

$$\begin{aligned}
 x &= x(\psi, \tau_t, \theta_0) = K \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau_t) + \sigma_1 (1 - \cos \tau_t) + \\
 &+ \sigma_2 [\cos(\psi + \sigma_2 \tau_t) - \cos \psi] \\
 & \hspace{15em} (4.25) \\
 y &= y(\psi, \tau_t, \theta_0) = K \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau_t) + \sin \tau_t - \\
 &- \sigma_2 [\sin(\psi + \sigma_2 \tau_t) - \sin \psi]
 \end{aligned}$$

הערה: במשוואות (4.24) ו-(4.25) ניתן היה לחלץ את ψ_0 במקום את θ_0 או τ_1 , אך אין זה נוח בפתוח המתמטי.

4.5.2 משפחות המסלולים וה-PDS

נסמן ב-(+) את מסלולי ימין ($\sigma_1=1$) וב-(-) את מסלולי שמאל ($\sigma_1=-1$), משני הסוגים:

$$\begin{aligned}
 x^+ &= x(\psi^+, \tau_t^+, \theta_0^+; \sigma_2^+) \\
 y^+ &= y(\psi^+, \tau_t^+, \theta_0^+; \sigma_2^+)
 \end{aligned}
 \hspace{10em} \sigma_1=1 \hspace{10em} (4.26)$$

$$\begin{aligned}
 x^- &= x(\psi^-, \tau_t^-, \theta_0^-; \sigma_2^-) \\
 y^- &= y(\psi^-, \tau_t^-, \theta_0^-; \sigma_2^-)
 \end{aligned}
 \hspace{10em} \sigma_1=-1 \hspace{10em} (4.27)$$

משוואות אלו מתארות את המסלולים האופטימליים, משמאל ומימין, אלה הנובעים (בזמן נסוג) מה-UP ואלה הנובעים מה-EUS. בסך הכל קיימים $2^3=8$ טיפוסים של המסלולים האופטימליים. נסמן אותם ע"י **, כאשר האות השמאלית מיצגת את אזור האסטרטגיה a, b, c או d (כמוגדר בצירור 4.1 ובצירור 4.3), והאות הימנית היא U - למסלולי UP ו-E - למסלולי EUS-tributaries. לדוגמא, bE הוא מסלול בעל $\sigma_1=\sigma_2=1$ הנובע מ-EUS. ניתן לתאר את המסלולים האופטימליים במרחב המצב התלת-ממדי ע"י הצגת חתכים בעלי ψ קבוע, ובאמצעות שני הפרמטרים τ_t^\pm ו- θ_0^\pm , כאשר ערכי σ_2^\pm יבחרו בהתאם למקרה. הערה: יש לשים לב, ש- ψ^+ ו- θ_0^+ שייכים למסלולי ימין, ו- ψ^- ו- θ_0^- שייכים למסלולי שמאל, ולכן בפתרונות הנומריים תחומי ערכיהם יהיו:

$$0 < \psi^+, \theta_0^+ \leq 2\pi \quad (a4.27)$$

$$-2\pi < \psi^-, \theta_0^- \leq 0$$

המסלולים מימין ומשמאל נחתכים ביניהם על משטח דיפרסלי ל-P (PDS), בנקודות בעלות זמן שווה לסיום (= הערך). נשווה את (4.26) ו-(4.27):

$$x(\psi^+, \tau_t^+, \theta_0^+; \sigma_2^+) = x(\psi^-, \tau_t^-, \theta_0^-; \sigma_2^-) \quad (4.28)$$

$$y(\psi^+, \tau_t^+, \theta_0^+; \sigma_2^+) = y(\psi^-, \tau_t^-, \theta_0^-; \sigma_2^-)$$

המשוואות (4.28) מיצגות $(2^2)^2 = 16$ צרופים שונים של מסלולי UP^\pm , מסלולי EUS-tributaries ו- σ_2^\pm , מתוכם רק 12 צרופים מתקיימים בפועל. צחתן ψ כלשהו של מרחב המצב מתקיימים לכל היותר 4 צרופים. לדוגמא, הצרופ $aU-cE$ מיצג נקודה דיספרסלית הנוצרת מחיתוך בין מסלול UP בעל $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ לבין EUS-tributary בעל $\sigma_1 = -\sigma_2 = -1$. דוגמאות לצרופים $aU-dU$, $aE-dU$ ו- $bE-dE$ מוצגות בציורים 4.10 עד 4.12, בהתאמה. תאור מפורט לציורים אלה יובא בהמשך. נוסיף את הדרישה לשויון הערך על נקודה דיספרסלית (דרישה זו אינה קיימת במשחק הסוג):

$$\tau_t^+ = \tau_t^- \quad (4.29)$$

נוסיף משוואות המקשרות בין ערכי (+) לערכי (-), בנקודה כלשהיא במרחב המשחק:

$$\psi^- = \psi^+ - 2\pi \quad (4.30)$$

$$\theta^- = \theta^+ - 2\pi$$

מ-(4.28) עם (4.29) ו-(4.30) נחלץ את θ_0^+ ו- θ_0^- :

$$\theta_0^+ = \theta_0(\psi, \tau_t; \sigma_2^+, \sigma_2^-) \quad (4.31)$$

$$\theta_0^- = \theta_0(\psi, \tau_t; \sigma_2^+, \sigma_2^-)$$

נציב ל-(4.26) או ל-(4.27), עם ערכי σ_2^\pm המתאימים, ונקבל את משוואת המשטח הדיספרסלי PDS:

$$x = x[\psi, \tau_t, \theta_0(\psi, \tau_t)] = x(\psi, \tau_t) \quad (4.32)$$

$$y = y[\psi, \tau_t, \theta_0(\psi, \tau_t)] = y(\psi, \tau_t)$$

זו משוואת משטח בשני הפרמטרים, ψ ו- τ_t .
 כאמור, קיימים כאן צרופים אחדים של סוגי מסלולים.
 בצרופים מסוג *U-*E ו-*E-*E המשוואות (4.28) טרנסצנדנטליות ב- θ_0^\pm ולכן הכרחי פתרון נומרי. בצרופים מסוג *U-*U ניתן לקבל פתרון אנליטי בשיטה שתוארה לעיל. לדוגמא, הפתרון עבור המקרה $\sigma_2^+ = \sigma_2^- = -1$ (הצרוף $aU-dU$) הוא:

$$\theta_0^+ = -\theta_0^- = \pi - \tau_t + \sin^{-1}[(1 - \cos \tau_t)/K] \quad (4.33)$$

המענין כאן הוא שבמקרה זה מתקבלות זוויות התחלתיות סימטריות. בפתרון הנומרי, ערכי σ_2^\pm והצרופים השונים יבחרו, כך שיתקיים תמיד, בעזרת (4.23):

$$\tau_1^\pm > 0 \quad \text{עבור מסלולי EUS-tributaries} \quad (4.34)$$

$$\sigma_2 \psi_0 < \sigma_2 \theta_0 \quad \text{עבור מסלולי UP}$$

תאור איכותי של המסלולים והמשטחים הסינגולריים

משוואות EUS ומשוואות המסלולים האופטימליים לסוגיהם, ממלאות את מרחב אזור ההתחמקות במסלולים אופטימליים. מפגש מסלולים משני האגפים יוצר PDS.

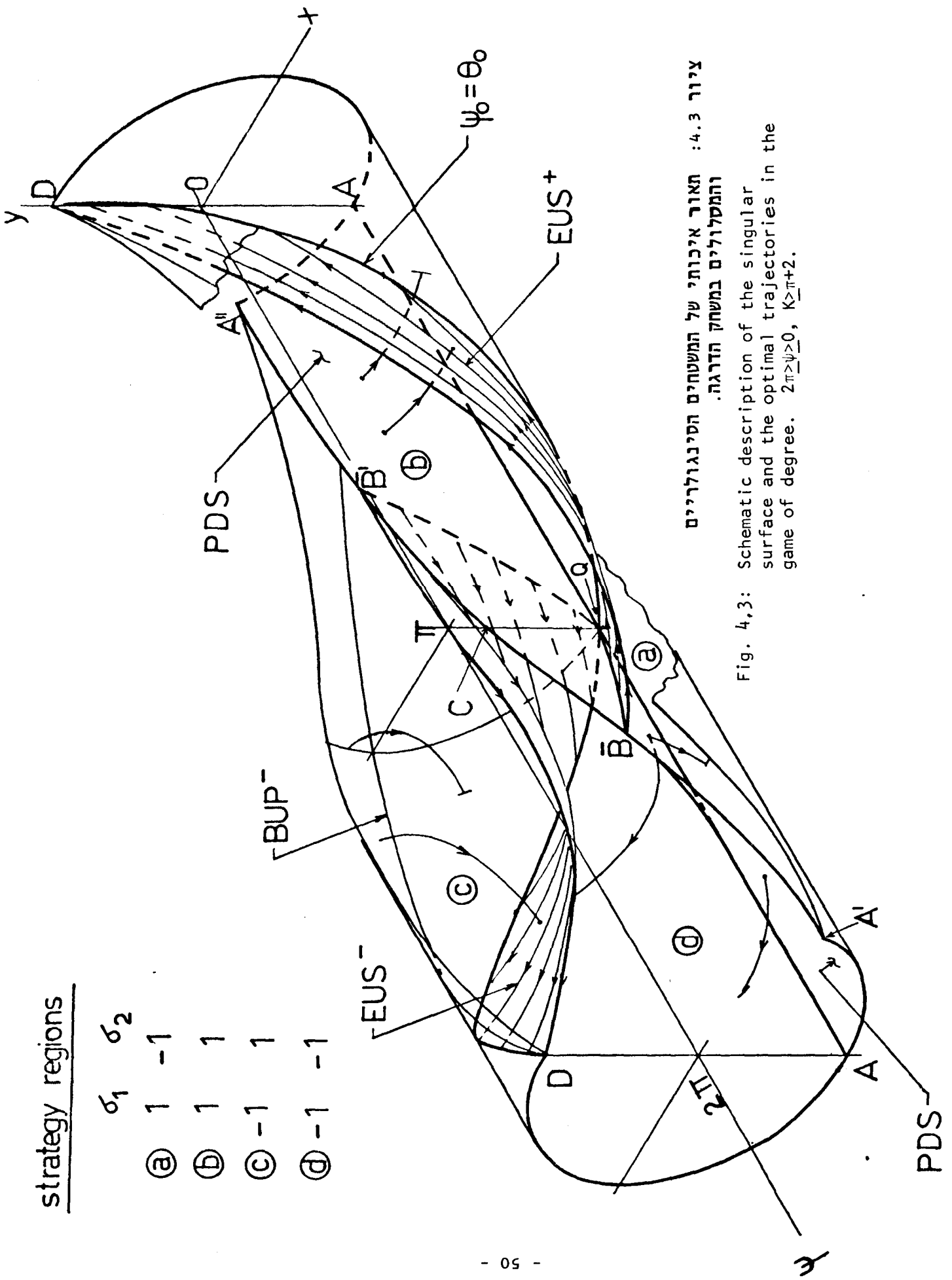
ציור 4.3 מתאר באופן איכותי את הפתרון במרחב המצב באזור ההתחמקות עבור $K > \pi + 2$ ובתחום $0 < \psi < 2\pi$. המחסום עצמו מוסר, אך מסומנים קוי החיתוך שלו עם המטרה ($A''DAA'DAA'$) ועם המשטחים הסינגולריים ($EUS^+ - D\bar{B}, EUS^- - D\bar{B}'$, $A''\bar{B}C\bar{B}'A''$). הנקודות המסומנות מזדהות עם אלו של ציור 4.3 במקור [16], למעט \bar{B} ו- \bar{B}' , אשר קרובות אמנם ל- B ו- B' אך אינן מתלכדות עימן. המשטח הדיספרסלי PDS תחום עיני הקשתות AA' ו- AA'' , ועיני הקוים: $A''CA'$ - על המחסום, ו- AQA - על המטרה. המשטח האוניברסלי EUS^+ תחום עיני הקוים: $\bar{B}D$ - על המחסום, QD - על המטרה, ו- $\bar{B}Q$ על PDS. המשטח האוניברסלי EUS^- תחום עיני הקוים: $D\bar{B}'$ - על המחסום, QD - על המטרה, ו- $\bar{B}'Q$ על PDS.

המשטחים האוניברסליים EUS^\pm מורכבים עצמם ממסלולים אופטימליים, אשר מתחילים (בזמן אמיתי) על PDS או על המחסום (כמובן, בקרבתו, כלפי פנים EZ) ומסתיימים על המטרה ($\psi_0 = \theta_0$). מעניין, ש- EUL מחסום ומסלוליו שואף ל- EUS במשחק הדרגה ומסלוליו, כפי שניתן לראות ממשוואת EUS (4.16) אם נציב בה $\theta_0 = 0$ ונשווה אותה ל-(4.16) במקור [16]. יחד עם זאת, דרכיהם נפרדות בסביבת ה-PDS מאחר שהזמן לסיום בשני המשחקים שונה.

מה- EUS^\pm ומה- UP^\pm נובעים (בזמן נסוג) מסלולים. מסלולים לדוגמא מותוים בציור 4.3. כשנבנה לאחור את המסלולים, חלקם יגיעו ל-NUP (ראה לדוגמא שני המסלולים באזור c), חלקם לקרבת המחסום, וחלקם ל-PDS. על ה-PDS, כאמור, הזמן לסיום τ_t לשני הכיוונים שווה. הנקודות A', A'' ו- C של חיתוך PDS עם המחסום מתלכדות עם הנקודות המתאימות של PDL מחסום. כלומר בנקודות אלו גם במשחק הסוג הזמנים לסיום שווים. ביתר המקומות (הקטעים $(A'C)$ ו- $(A''C)$) PDL אינו שואף ל-PDS, בגלל אי-שויון הזמנים לסיום במשחק הסוג. יחד עם זאת, במקרה שנבדק ($K=6$), ההבדל בזמנים קטן מאוד - סדר גודל של 1% מסהייכ הזמן לסיום, ולכן בו ה-PDL וה-PDS כמעט מתלכדים. ה-PDS ושני ה-EUS, ביחד עם המחסום והמטרה, מחלקים את אזור ההתחמקות לארבעה אזורי איטרטגיות a, b, c ו- d , המסומנים על גבי הציור. באזורים d ו- b המסלולים בעלי ψ קבוע, ובאחרים ψ משתנה.

strategy regions

	σ_1	σ_2
Ⓐ	1	-1
Ⓑ	1	1
Ⓒ	-1	1
Ⓓ	-1	-1



ציור 4.3: תאור איכותי של המשטחים המינגולריים והמסלולים במשחק הדרגה 2.

Fig. 4,3: Schematic description of the singular surface and the optimal trajectories in the game of degree. $2\pi > \psi > 0, K > \pi + 2$.

באופן אנלוגי למשחק הסוג, על פני ה-PDS, באזור המשטח $\bar{B}\bar{B}'Q$ (הצרוף b^*-d^*) מתמתגות הבקורות של שני השחקנים, ואילו באזור המשטחים $AA'\bar{B}Q$ ו- $AA'\bar{B}'Q$, (צרופים a^*-d^* ו- b^*-c^*) רק בקרתו של P. ראה בציור 4.3 דוגמא למקרה האחרון (הצרוף aU-dE).

4.7 תאור חתכי משחק הדרגה בערכי ψ שונים

ציורים 4.4 עד 4.9 מתארים חתכי ψ אחדים של המרחב עבור המקרה $K=6$. ציור 4.4 מציג צורה אופינית של אזור ההתחמקות והמשטחים הסנגולריים שבו, וכן את הגדרת המסלולים והאסטרטגיות האופיניים לכל אזור. ביתר הציורים: קוים המסומנים בחיצים הם מסלולים במבט אמיתי ($\sigma_1=\sigma_2$). קוים ללא חץ הם חתך דרך מסלולים בעלי θ_0 שווה, באזורי $\sigma_1=-\sigma_2$. עגולים קטנים מסומנים חתך דרך EUL מחסום. אזור התפיסה CZ מסומן. על ה-PSD מסומנים הזמנים τ_t לסיום (ערכים מקורבים). כל הציורים מתארים את התחום $-\pi \leq \psi \leq 0$, כאשר התחום המשלים מתקבל מסימטריה סביב הציר y.

ציורים 4.5 עד 4.8 מתארים את חתכי ψ שווה ל- 180° , -170° , -90° ו- -30° , בהתאמה. ציור 4.9 מתאר את בנית ה-PSD עיני חיתוך איזוכרונות (קוים שוי זיון לסיום) מימין ומשמאל, עבור המקרה $\psi=-170^\circ$. בכל החתכים ניכרת חלקות של המסלולים והחתכים, למעט על PDS. ככל שנרחק מ- $\psi=-\pi$ לכיוון $\psi=0$, EUS^+ יצטמק עד שיעלם לחלוטין בכל החתכים בעלי $\bar{\psi} > \psi$.

בכל אחד מן המקרים, הצרופים המרכיבים את ה-PDS שונים. לדוגמא, עבור $\psi=-170^\circ$ (ציורים 4.4 ו-4.6) הצרופים הם aU-dE, aU-dU, aE-dE ו-bE-dE. המסלול מטיפוס bU אינו קיים בחתך זה. עבור $\psi=-90^\circ$ (ציור 4.7) הצרופים הם aU-dU, aE-dU (צרוף חדש) ו-aE-dE. מעניין החתך $\psi=-180^\circ$ שבו החתך דרך PDS הוא קו ישר (CQ), והצרוף המרכיב אותו הוא יחיד bE-dE. יש לשים לב, שלמעט החתך הסימטרי $\psi=-180^\circ$, ולמעט קטעי PDS המורכבים מהצרוף aU-dU (ראה (4.33)), מסלולים בעלי $|\theta_0|$ שווה אינם נפגשים באותה נקודה על PDS. חוץ מהחתך הסימטרי ומהחתך הקיצוני ($\psi=0$), PDS סוטה מ-PDL מחסום בשעור כלשהוא. ראה הגדלה בציור 4.7.

הערות:

1. התוצאות בציורים הבאים חושבו באמצעות תוכנית מחשב, המחשבת את המסלולים ואת PDS. שיטת הפתרון הנומרי מוצגת בנספח א'.
2. ראה נספח די במקור [16] להשוואה עם משחק הרדיפה הרגיל.

הגדרת סוגי המסלולים:

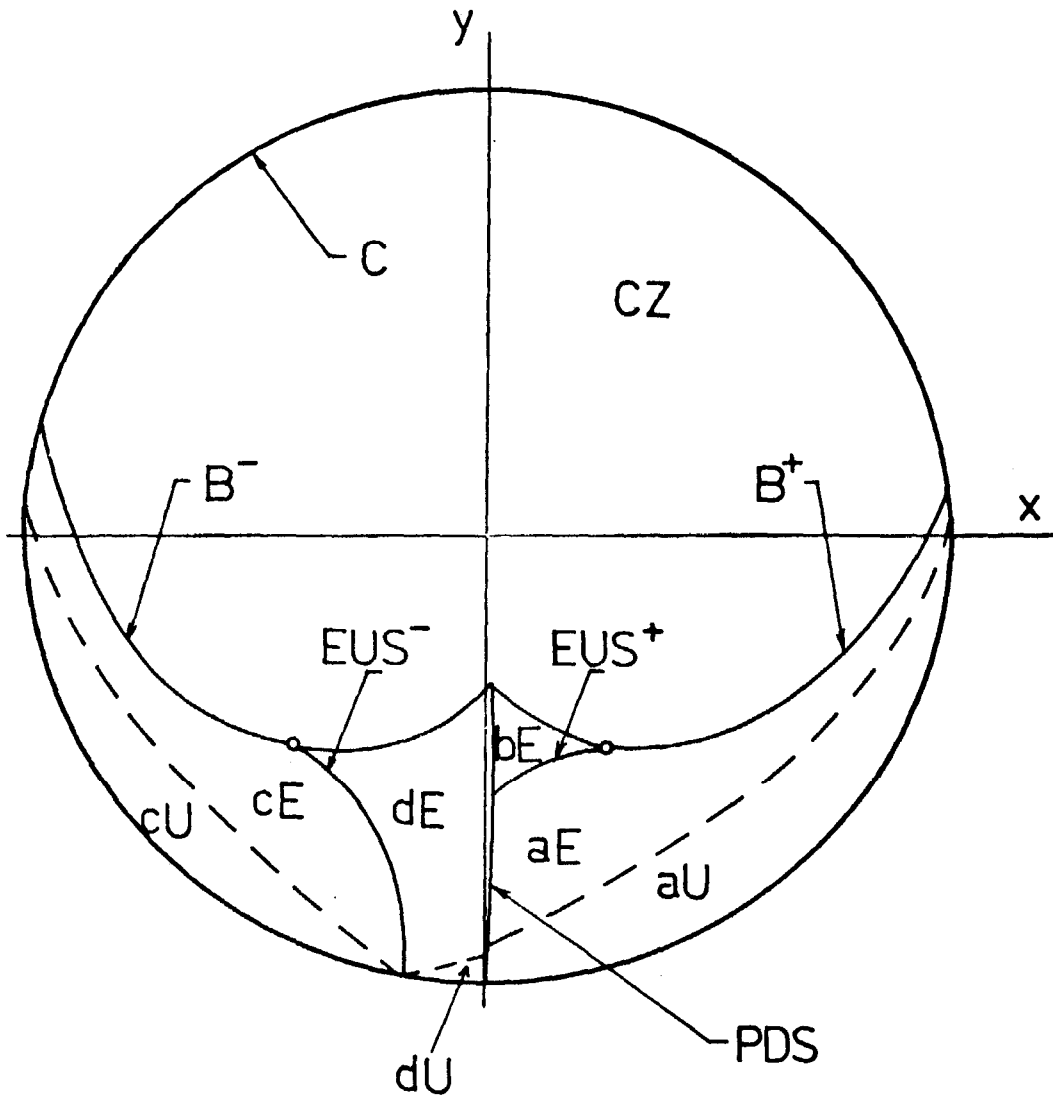
- U - מסלולים הנובעים מ-Up.
- E - מסלולים הנובעים מ-EUS.

הגדרת האזורים:

v	u	ה א ז ר
-1	1	(a)
1	1	(b)
1	-1	(c)
-1	-1	(d)

definition of regions

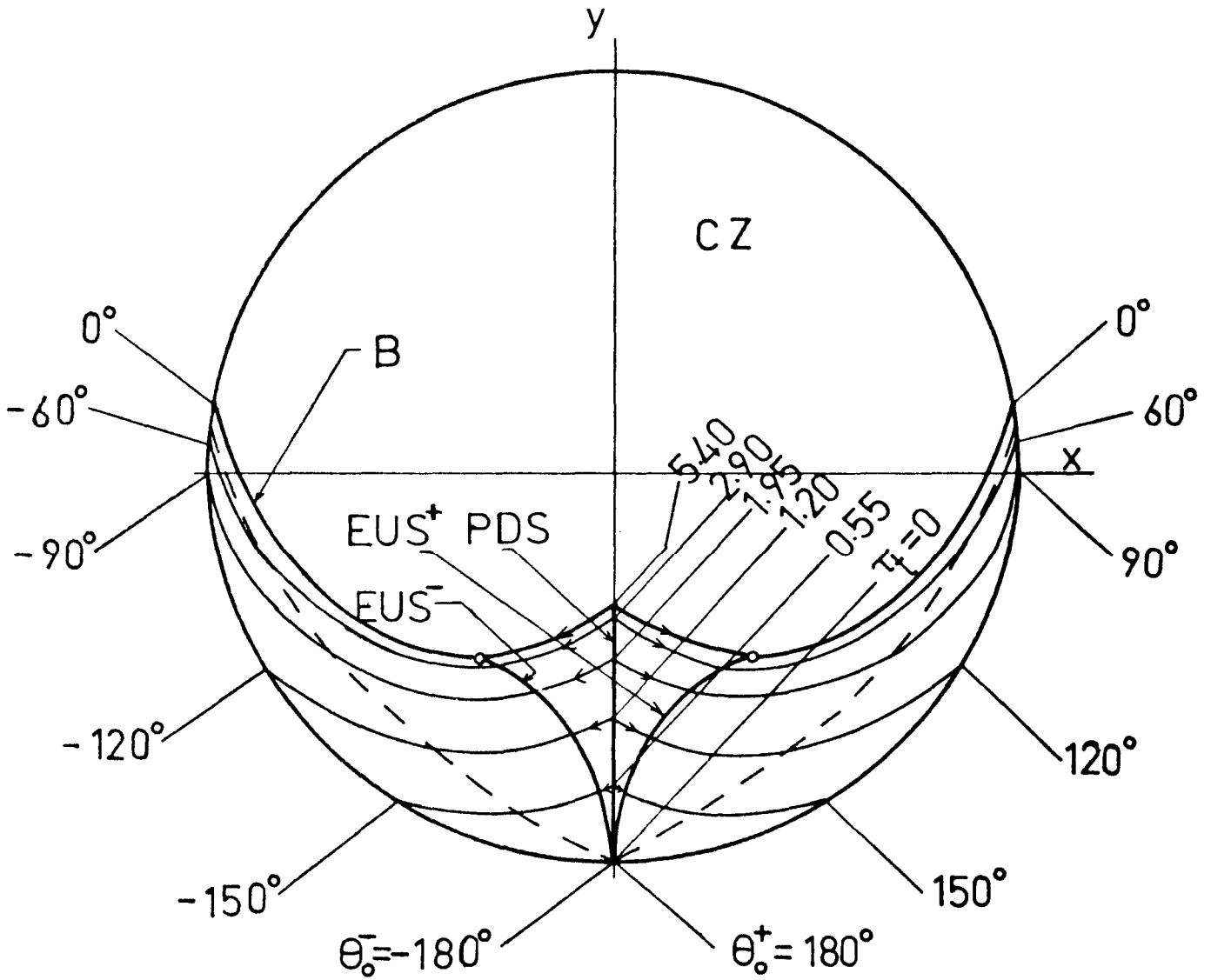
- termination on EUS (E) or UP (U)
- strategy regions (a), (b), (c) or (d)



ציור 4.4: חתך ψ אופייני והגדרת אזורים במשחק הדרגה.

Fig. 4.4: Typical ψ - section and definition of zones in the game of degree.

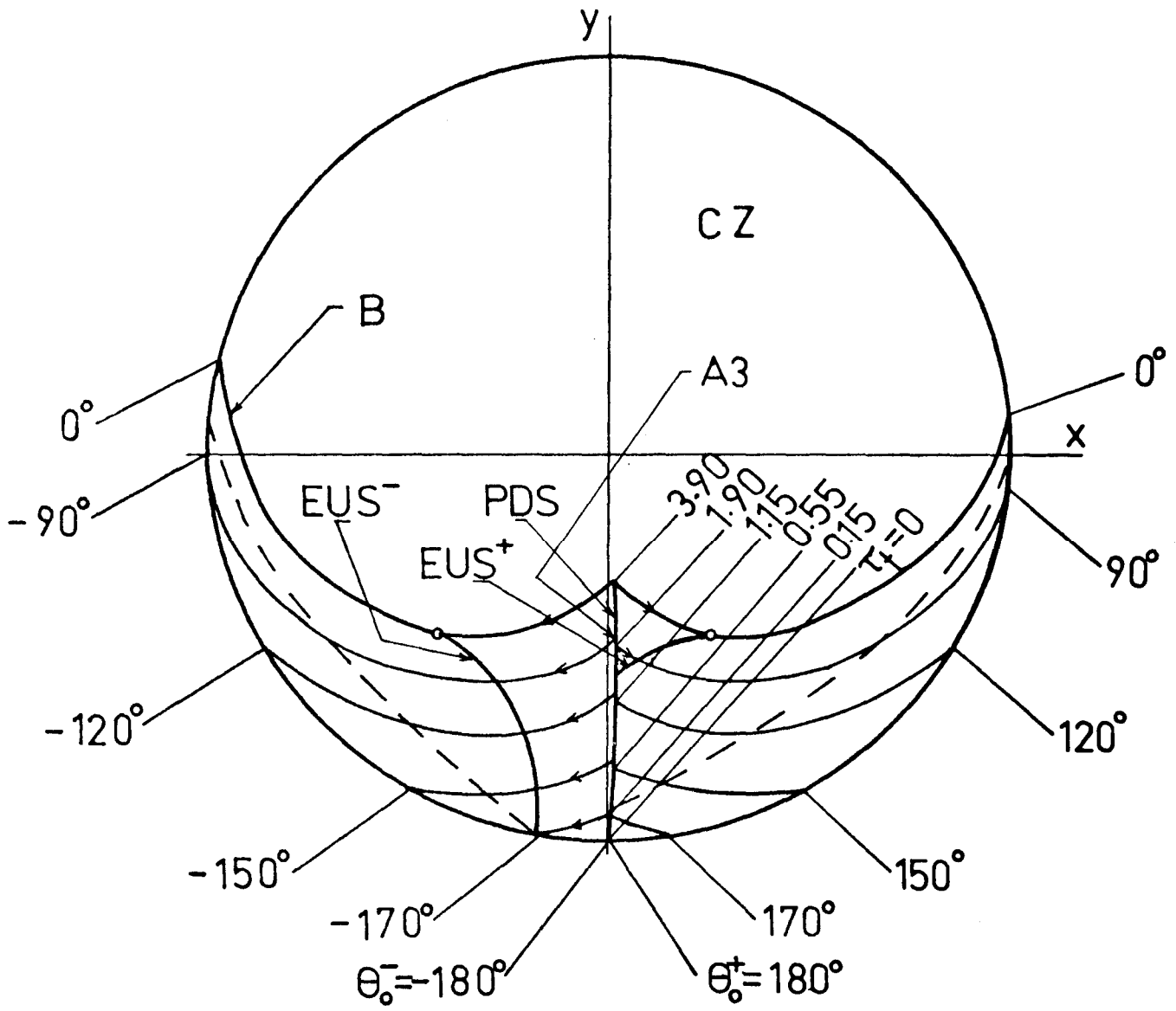
$$-\pi \leq \psi < 0$$



ציר 4.5 : חתכי θ_0 במשחק הדרגה.

Fig. 4.5: θ_0 - sections in the game of degree.

$K=6, \psi=-180^\circ$.



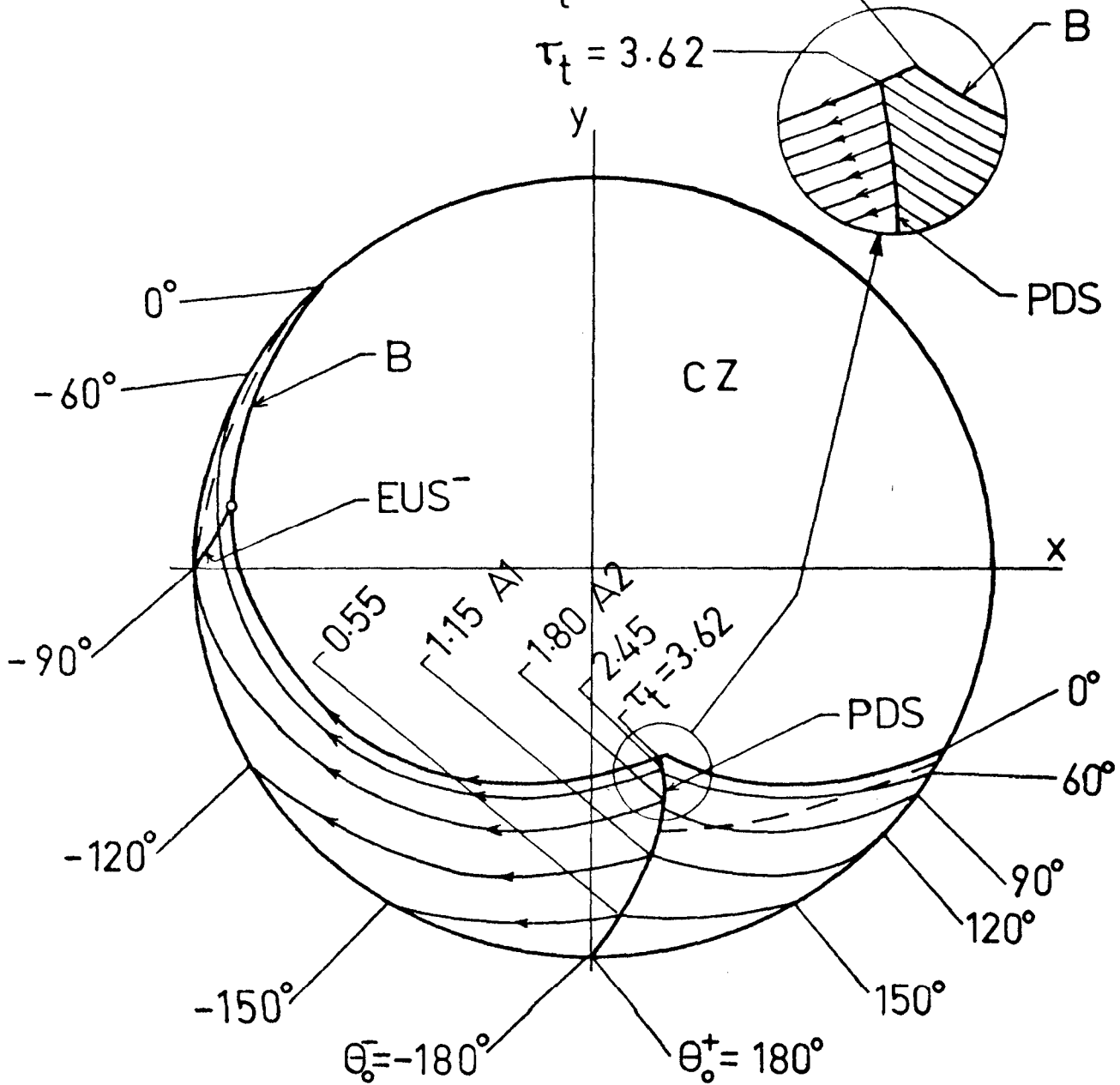
ציור 4.6: חתכי θ_0 במשחק הדרגה.

Fig. 4.6: θ_0 - sections in the game of degree.

$K=6, \psi=-170^\circ$.

on the PDL of
the barrier B $\begin{cases} \tau_t^+ = 3.66 \\ \tau_t^- = 3.62 \end{cases}$

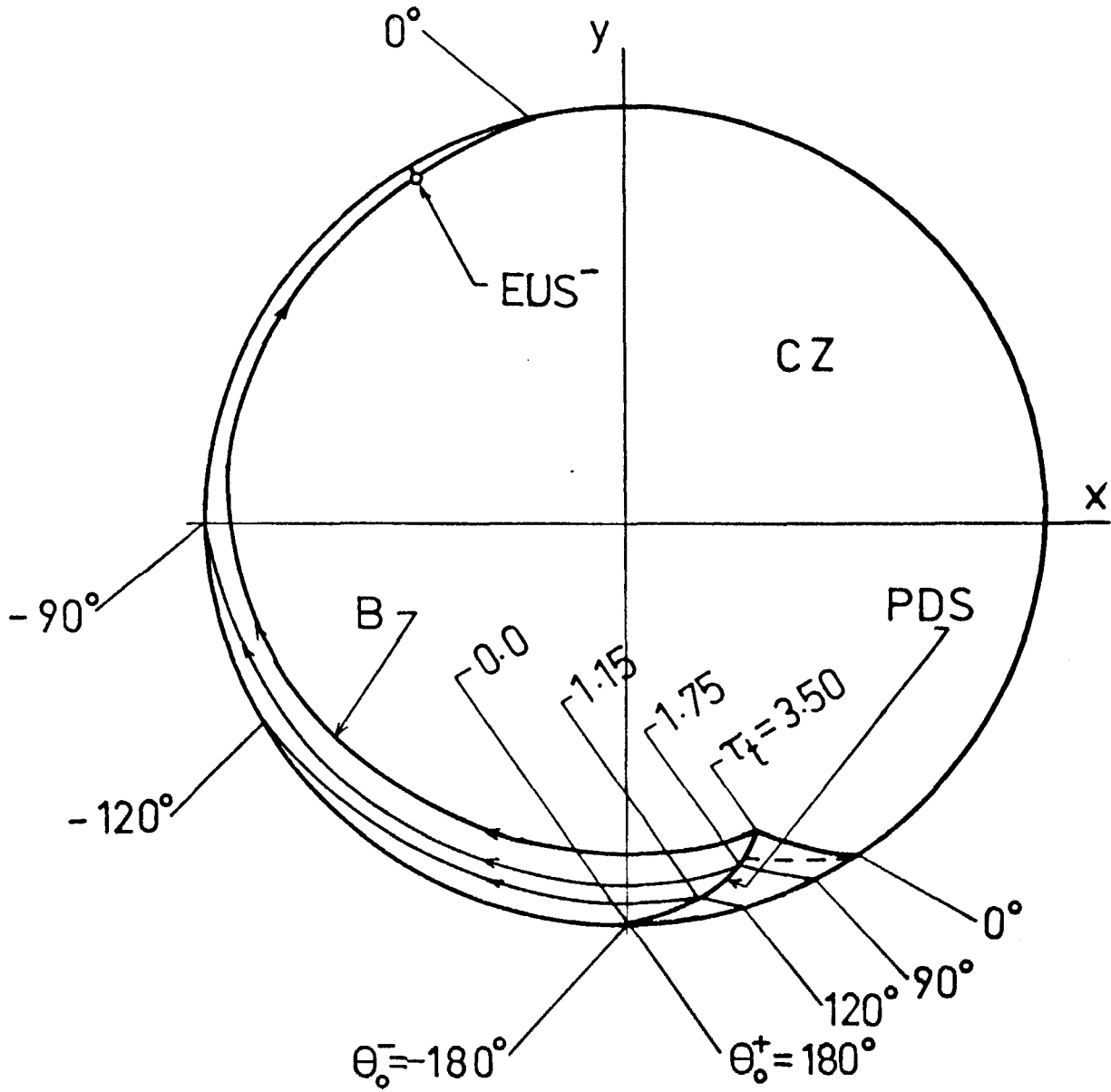
$$\tau_t = 3.62$$



ציור 4.7 : חתכי θ_0 במשחק הדרגה.

Fig. 4.7: θ_0 - sections in the game of degree.

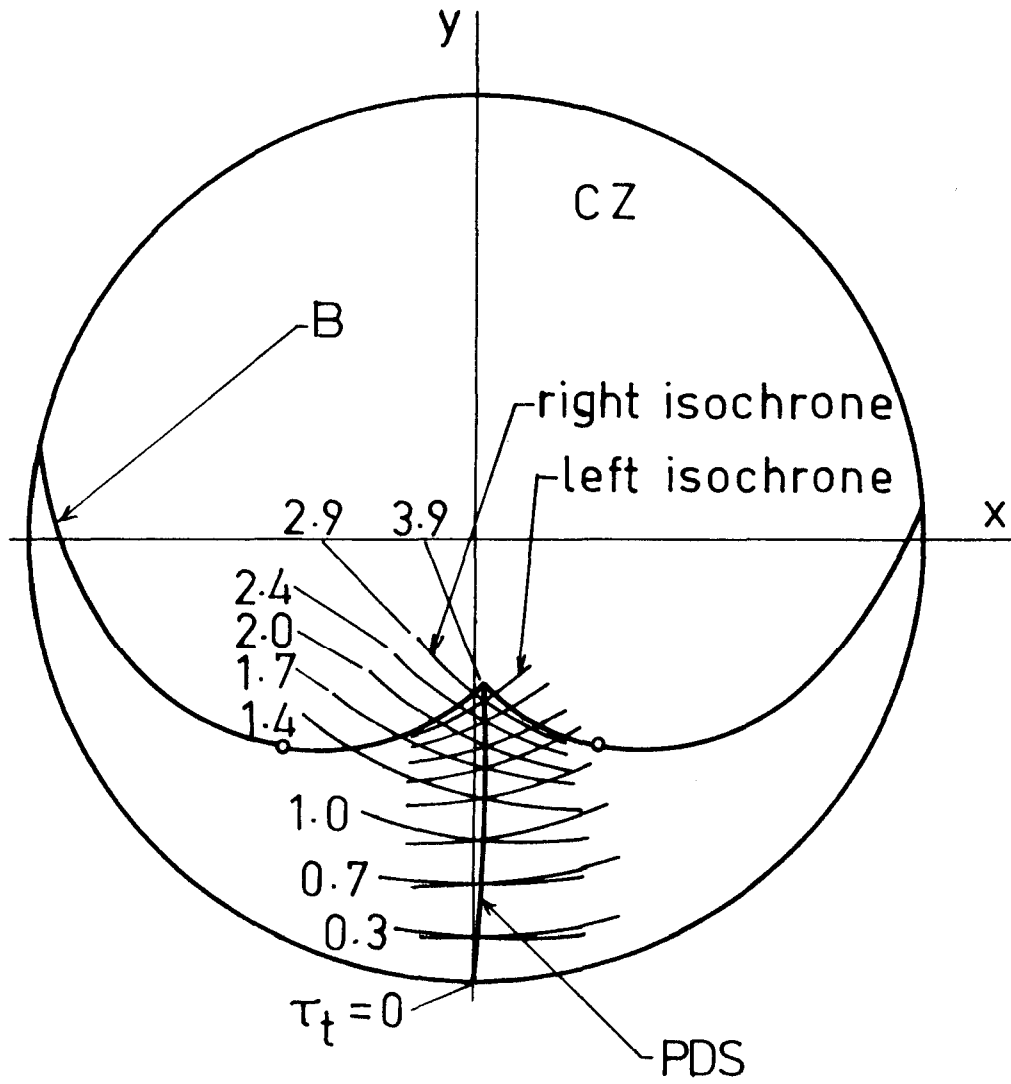
$$K=6, \psi=-90^\circ.$$



ציור 4.8 : חתכי θ_0 במשחק הדרגה.

Fig. 4.8: θ_0 - sections in the game of degree.

$K=6, \psi=-30^\circ$.



ציור 4.9: איזוכרונות לבניית PDS במשחק הדרגה.

Fig. 4.9: Isochrones in construction of PDS in the game of degree.

$K=6, \psi=-170^\circ.$

4.8 תאור תמרונים במרחב האמיתי

בציורים 4.10 עד 4.12 מוצגים תמרונים הנובעים מ-PDS, בשלושה צרופים שונים: $aU-dU$, $aE-dU$, ו- $bE-dE$, בהתאמה. התמרונים מתאימים לנקודות התחלה על PDS בציורים 4.7 ו-4.6, המסומנות $A1, A2$ ו- $A3$ בהתאמה. תמרונים מטיפוס $aE-dE$ ו- $aU-dE$ אינם מוצגים. ציור 4.10 - נקודה $A1$: זו נקודה דיספרסלית שבה ל- P יש שתי אופציות פניה, והסיום מתרחש לפני ש- E מספיק להתישר בתנועתו. לכן הסיום על UP . ניתן לראות ש- $\theta_0^+ = -\theta_0^-$ כפי שהוצג ב-(4.33), וכן שזמני הסיום τ_t^\pm שווים. ציור 4.11 - נקודה $A2$: גם זו נקודה דיספרסלית ל- P . תנועתו של E מושפעת מכיוון הפניה שנבחר ע"י P : אם P בחר שמאלה, E מסיים בנקודה E_2^- בדיוק בסיום הפניה, כלומר על UP . אם P בחר ימינה E מתיישר בנקודה E_2^+ ומסיים ב- E_3^+ . קטע תנועה זה הוא על EUS . כאן θ_0^\pm שונים. זמני הסיום τ_t^\pm שווים. ציור 4.12 - נקודה $A3$: גם זו נקודה דיספרסלית ל- P . E בוחר את כיוון הפניה שלו בהתאם לכיוון הפניה של P . בשני המקרים E אינו נע בקו ישר, ולכן הסיום על UP . גם כאן θ_0^\pm שונים. זמני הסיום τ_t^\pm שווים.

4.9 גרדיאנט הערך ופונקציות המיתוג

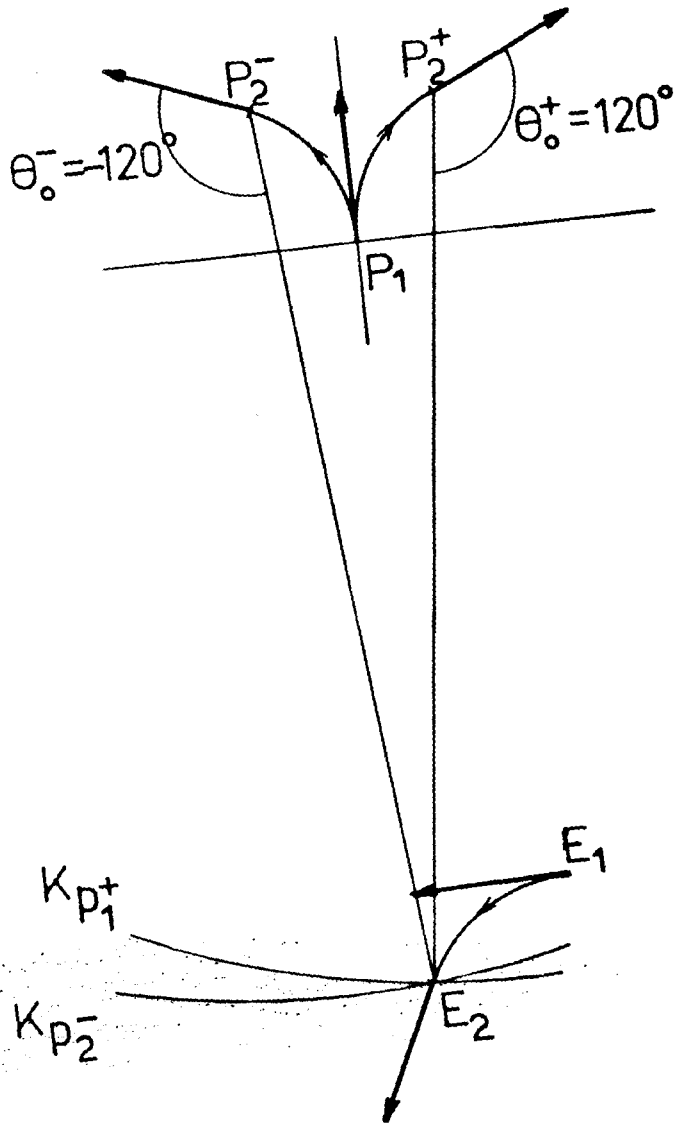
הפתוח של משחק הדרגה נעשה מתוך הנחת אי קיום מתוג בפונקציות המיתוג. בסעיף זה נתייחס לענין זה. עבור מסלולי UP , נשתמש במשוואת ∇T (3.24) עם תנאי התחלה (4.4):

$$T_x = M_0 K \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau)$$

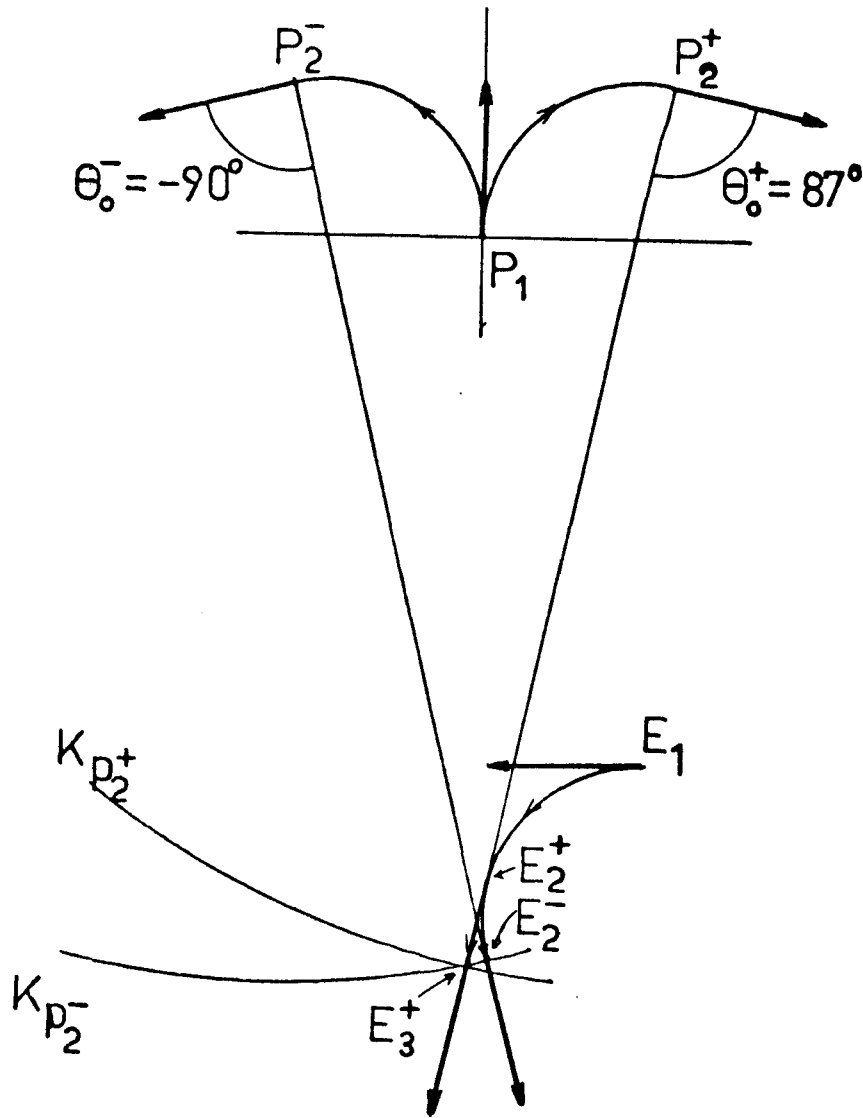
$$T_y = M_0 K \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) \quad (4.35)$$

$$T_\psi = -\sigma_2 M_0 K [\cos(\psi_0 - \theta_0 - \sigma_2 \tau) - \cos(\psi_0 - \theta_0)]$$

כאשר M_0 מוגדר ב-(4.5).



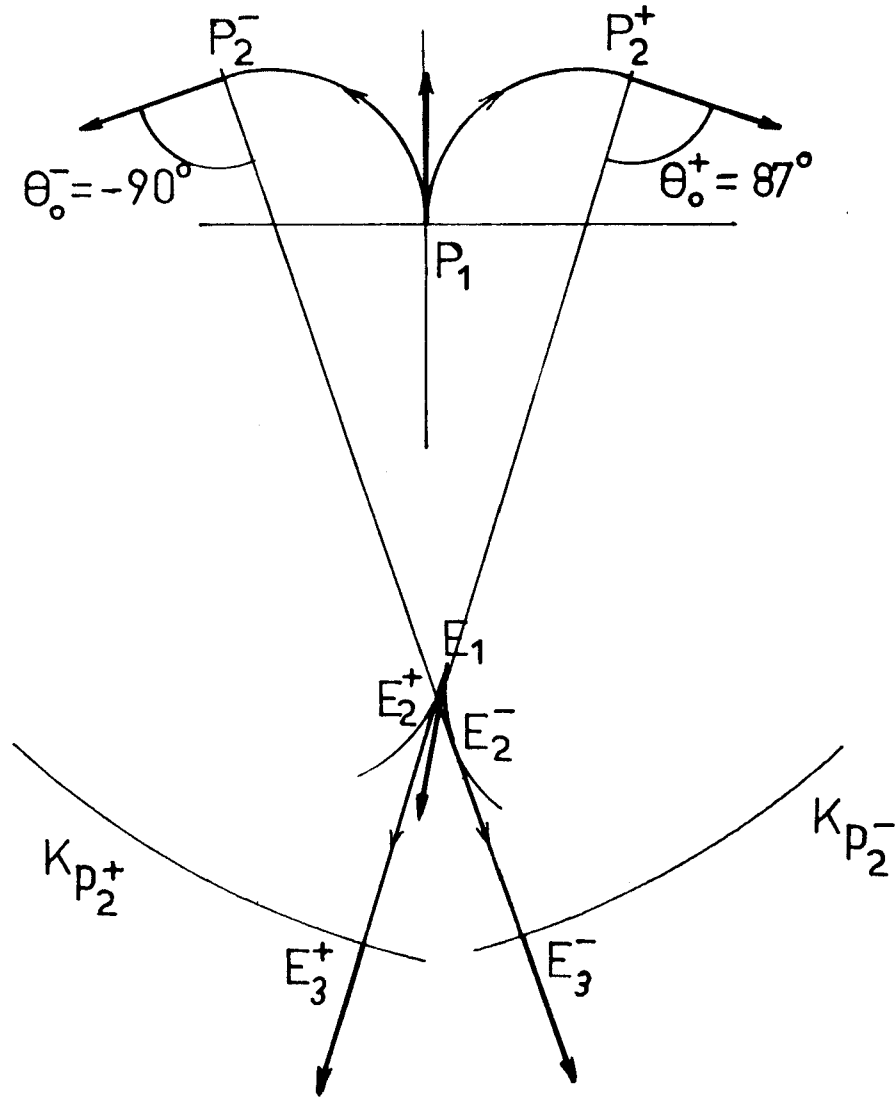
ציור 4.10: נקודת PDS A1 במרחב האמיתי במשחק הדרגה.
 Fig. 4.10: PDS-point A1 in the realistic space in the game of degree.
 צרוף $aU-dU$, $\tau_t = 1.15$, $\psi = -90^\circ$, $K=6$



ציור 4.11: נקודת PDS A2 במרחב האמיתי במשחק הדרגה.

Fig. 4.11: PDS-point A2 in the realistic space in the game of degree.

צרוף $aE-dU$, $\tau_t=1.80$, $\psi=-90^\circ$, $K=6$



ציור 4.12: נקודת PDS A3 במרחב האמיתי במשחק הדרגה.

Fig. 4.12: PDS-point A3 in the realistic space in the game of degree.

צרוף $bE-dE$, $\tau_t=1.95$, $\psi=-170^\circ$, $K=6$

הבקורות האופטימליות עבור מסלולי UP תהינה, באמצעות (3.25), (3.26) ו-(4.4):

$$\sigma_1 = \text{sgn}\{\sigma_1 M_0 K [\cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \theta_0]\} \quad (4.36)$$

$$\sigma_2 = \text{sgn}(-T_\psi)$$

כאשר T_ψ נלקח מתוך (4.35).
עבור מסלולי EUS-tributaries, נציב תנאי התחלה בזמן τ_1 על EUS מתוך (4.17):

$$\begin{aligned} T_{x_1} &= M_0 K \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau_1) \\ T_{y_1} &= M_0 K \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau_1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$T_{\psi_1} = 0$$

נעזר בערך ההתחלתי של ψ מתוך (4.16):

$$\psi_1 = \theta_0 + \sigma_1 \tau_1 \quad (4.38)$$

נציב את תנאי ההתחלה (4.37) לתוך משוואות ∇T הכלליות (3.24) כאשר
 $s_1 = M_0 K$, $s_2 = \theta_0 + \sigma_1 \tau_1$
נעזר גם ב-(4.38):

$$\begin{aligned} T_x &= M_0 K \sin(\theta_0 + \sigma_1 (\tau + \tau_1)) \\ T_y &= M_0 K \cos(\theta_0 + \sigma_1 (\tau + \tau_1)) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$T_\psi = -\sigma_2 M_0 K (\cos \tau - 1)$$

מודגש ש- θ_0 כאן הוא התחלת EUS על המטרה, ולא התחלת המסלול על EUS.
 M_0 מוגדר ב-(4.17), להבדיל מ- M_0 של (4.35).
הבקורות האופטימליות עבור ה-tributaries תהינה, בעזרת (3.25), ו-(3.26):

$$\sigma_1 = \text{sgn}\{\sigma_1 M_0 K [\cos(\theta_0 + \sigma_1(\tau + \tau_1)) - \cos\theta_0]\} \quad (4.40)$$

$$\sigma_2 = \text{sgn}(-T_\psi)$$

כאשר T_ψ נלקח מתוך (4.39).
בסעיף 4.6 ציינו שמסלולי משחק הדרגה הקיצוניים כלפי המחסום, שואפים למסלולי המחסום המקבילים להם.
יחד עם זאת, ישנה אי-רציפות בגרדיאנט הערך, כפי שניתן לראות אם נציב למשוואת M_0 (4.17) $\theta_0 = 0$, או למשוואת M_0 (4.5) $\psi_0 = \theta_0 = 0$. בשני המקרים M_0 ישאף לאינסוף, ובעקבותיו גם ∇T . זו תופעה צפויה, מאחר שהערך T על המחסום במשחק הסוג אינו מוגדר, או מוגדר כאינסופי.
בדומה למשחק הסוג, נוכל גם כאן למצוא את זמני המיתוג, בנקודות בהן פונקציות המיתוג של (4.36) ו-(4.40) מחליפות סימן. אבל, להבדיל, כאן הניתוח להוכחת אי קיום מתוג בתוך אזור ההתחמקות מסובך, וכנראה למעשה בלתי אפשרי אנליטית.
יחד עם זאת, מתוך ההתנהגות החלקה של משחק הסוג בערכי $K > \pi + 2$, ובידיעה שהמהלכים האופייניים במשחק הדרגה ובמשחק הסוג דומים, וכן מאחר שמשכי התמרונים במשחק הדרגה קצרים יותר (הסיום מוקדם יותר) סביר להניח שלא יתרחש מיתוג במשחק הדרגה עבור $K > \pi + 2$.
במקרה המוצג בפרק זה ($K=6$), נבדקו פונקציות המיתוג (4.36) ו-(4.40) לאורך המסלולים, ואומת אי-קיום מיתוג. בכל מקרה נומרי אחר, ניתן לבצע בדיקה זו על מנת לוודא אי-קיום מיתוג.
בערכי $K < \pi + 2$, שבהם המחסום מקבל מתכונת אחרת, יתכן שיתקיימו מיתוגים גם במשחק הדרגה.

פרק 5: סיכום ומסקנות

במחקר זה מוצגת בעית ההתחמקות מתצפית במודל שתי המכוניות הזרות, בגרסת משחק הדרגה (GOD). המחקר מהווה המשך למחקר קודם, שעסק בפתרון משחק הסוג (GOK) של אותו מודל.

פותחו הבקרות האופטימליות והמשוואות הכלליות של המסלולים האופטימליים. מוצג פתרון נומרי מלא עבור המקרה $K=6$ (K הוא היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי). להערכת, פתרון זה מיצג את התחום הפרמטרי $K > \pi + 2$. התחום $K < \pi + 2$ דורש מחקר נוסף הן במשחק הסוג והן במשחק הדרגה. מהותו של הפתרון, בכיסוי מלא של אזור ההתחמקות במסלולים אופטימליים. חלקם של המסלולים מתחיל, בזמן אמיתי, מן החלק הלא-שימושי, חלקם מן המחסום, וחלקם מהמשטח הדיספרסלי לרודף, שממנו יוצאים מסלולים בעלי זמן שווה לסיום לשני הכיוונים. על המשטח הדיספרסלי הרודף מכתיב את כיוון התנועה במרחב המצב. על חלק מן המשטח לרודף ישנה השפעה ישירה על בקרת המתחמק, ועל חלקו בקרתו של המתחמק בלתי תלויה. כל המסלולים מסתיימים על החלק השימושי, כאשר חלקם עובר דרך משטחים אוניברסליים למתחמק (קיימים שניים), המיצגים תנועה בקו ישר של המתחמק.

התמונות האופיניים מורכבים מפניה מתמדת של P, ומפניה של E ולאחריה לעיתים התישרות. מיגוון צורות הסיום וצורות ההתחלה יוצר מיגוון של מסלולים מסוגים שונים.

הניתוח האנליטי והנומרי, הנעשים במימד אחד גבוה יותר מזה שבמשחק הסוג, מורכב למדי, במיוחד לאור מגוון סוגי המסלולים. פותחה גישה שיטתית לטיפול בכל מקרה מספרי $(K > \pi + 2)$, בצורה הניתנת למיחשוב מלא או חלקי.

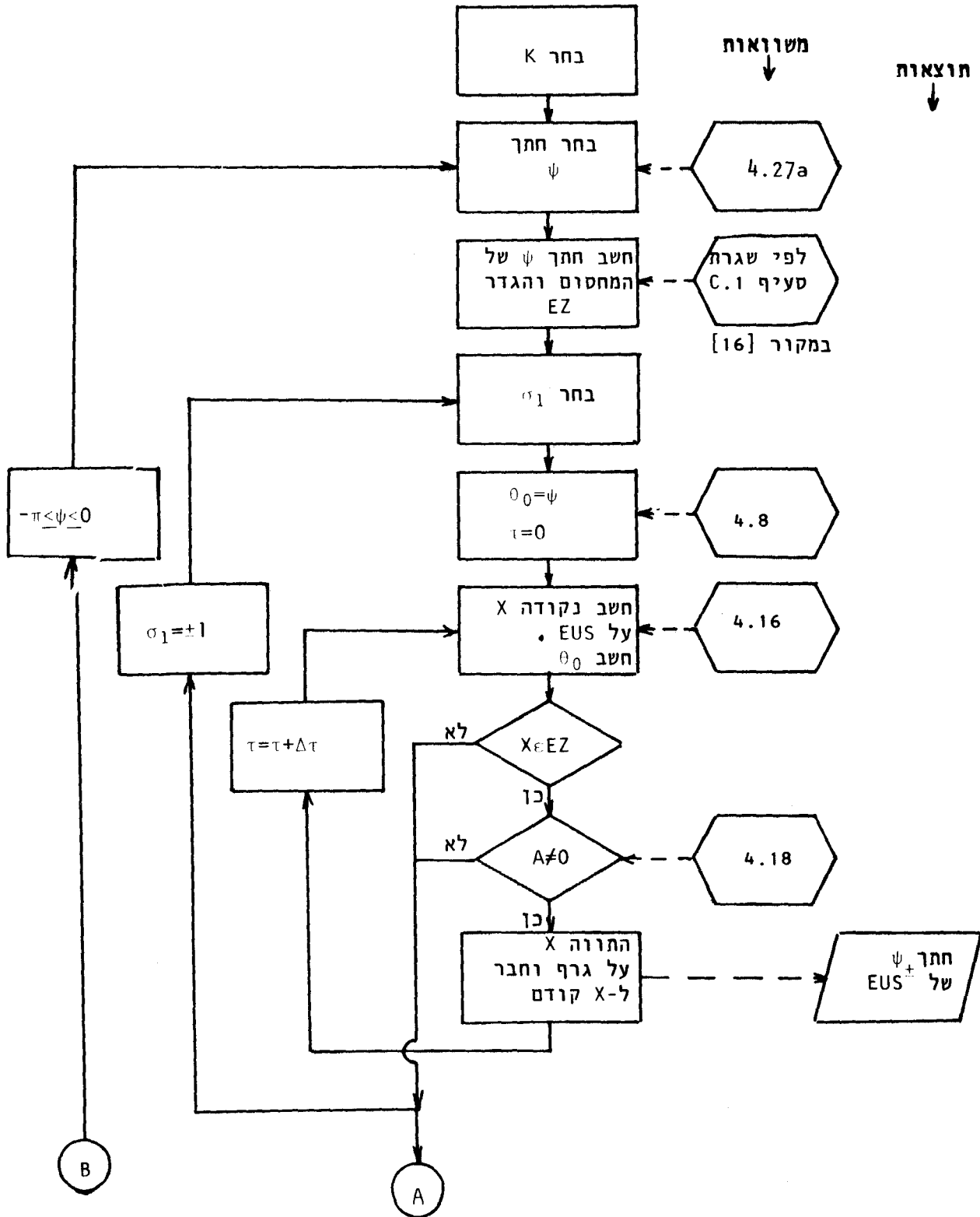
נספח א': שיטת הפתרון הנומרי

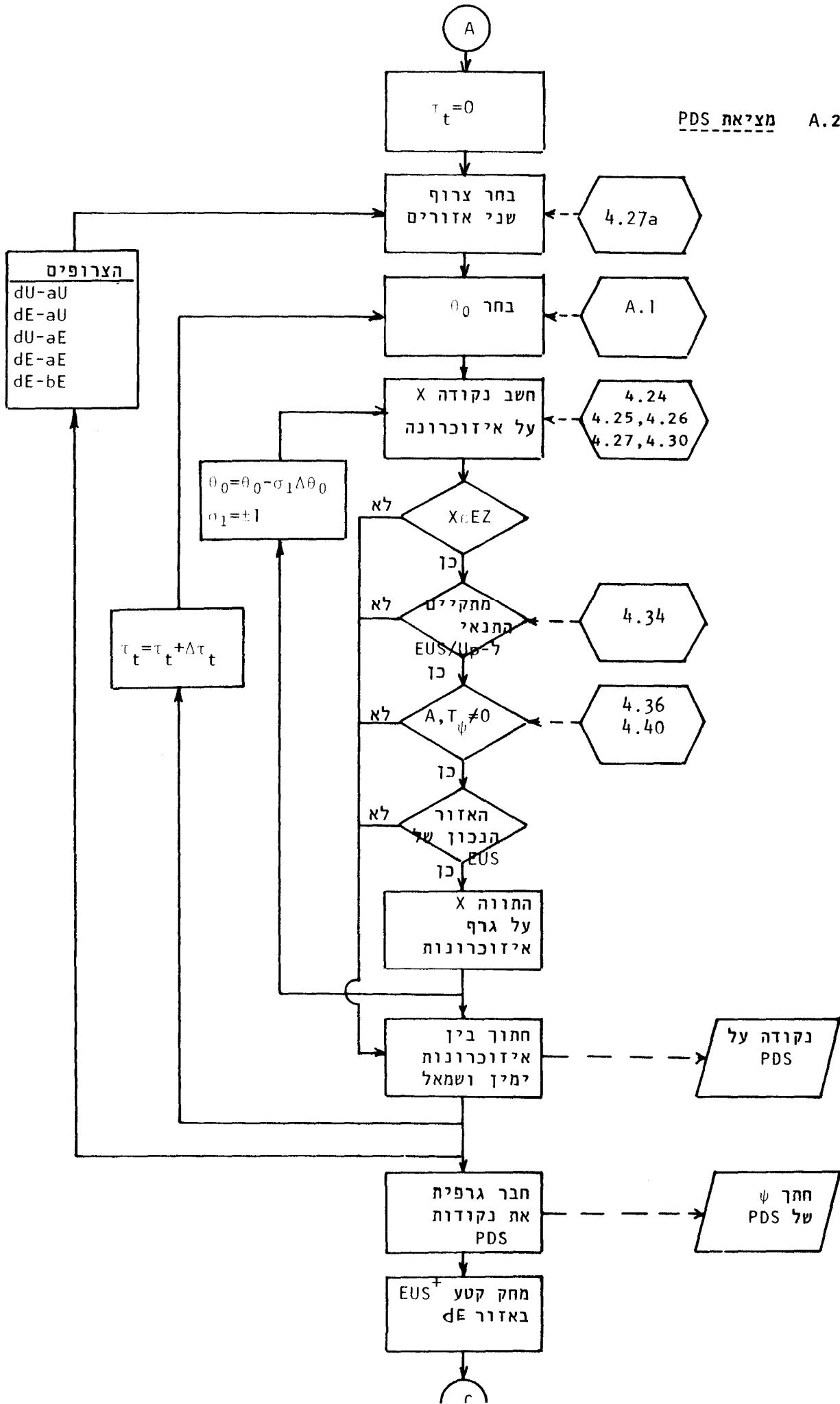
A.1 מְבּוֹא

בנספח זה נציג את שיטת הפתרון הנומרי של משחק הדרגה. הפתרון מורכב מחישוב חתכי ψ (בתחום $-\pi < \psi < 0$) של EUS^\pm , של PDS - באמצעות חישוב אנליטי ו/או פתרון משוואות טרנסצדנטליות ו/או חיתוך איזוכרונות (קוים שוי ערך τ_t), ושל מסלולים אופטימליים או חתכים שוי θ_0 דרך מסלולים אופטימליים, בהתאם למקרה. מהלך הפתרון כולל בדיקות תקפות ואי-קיום מיתוג של הנקודות המחושבות. תהליך הפתרון ניתן אולי למיחשוב אוטומטי מלא, אך ברמת סיבוך גבוהה עקב ריבוי האופציות, ועקב אי ידיעה מראש של אזורי הגבול המפרידים בין האופציות השונות. מציאת PDS במלואו מהווה קושי מיוחד מאחר שמשוואותיו טרנסצדנטליות בשני משתנים. השיטה בה השתמשתי, המוצגת בתרשים הזרימה שבסעיף A.2, משלבת חישוב נומרי של המסלולים באופציות השונות, ומציאת ה-PDS בבניה גראפית. ראה גישה דומה ב-[10]. עבור כל מקרה בו נדרש דיוק רב יותר, ניתן לעדן את הבניה הגראפית או לפתור נומרית את המשוואות הטרנסצדנטליות של PDS. החישובים בוצעו באמצעות תוכנית מחשב בשפת BASIC, שנכתבה והורצה על מחשב אישי מדגם Sinclair ZX 81. התוכנית מוצגת בסעיף A.3.

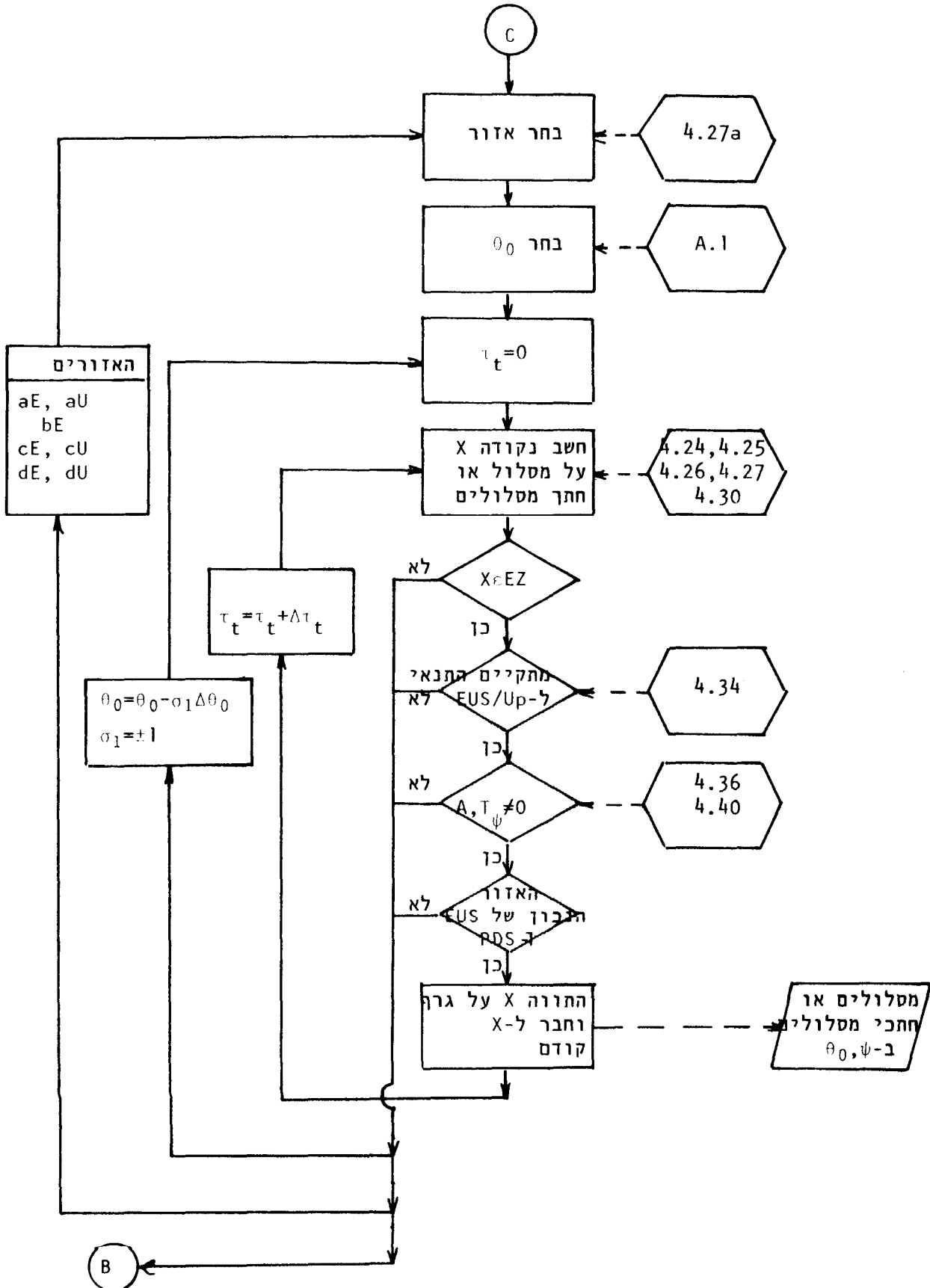
A.2 תהליך הפתרון הנומרי של משחק הדרגה

A.2.1 התוית EUS^+





התווית מסלולים A.2.3



A.2.4 הערות והסברים

1. השיטה של מציאת ה-PDS היא באמצעות בנית איזוכרונות (קוים שווי ערך) בכל אחד מהאזורים הגובלים ב-PDS, לפי הגדרתם בציור 4.4. חותכים בין איזוכרונות בעלות אותו ערך (הזמן τ_t) של שני אזורים הגובלים זה עם זה ומקבלים נקודה על PDS.
2. חייבים להתקיים תנאים מיוחדים לשימוש בכל סוג מסלול - UP או EUS. כמו כן יש לבדוק האם אין התרחשות מתוגים או חריגה מגבולות גאומטריים מתאימים.
3. באזור התחתון של PDS (הצרוף aU-dU) ניתן לפתח את PDS בעזרת המשוואה האנליטית הישירה (4.33).
4. בתהליך המעשי, בחירת הערך הראשוני ל- θ_0 נעשית בניסוי וטעיה. כיוון השינוי שלו יהיה תמיד בכיוון $-\sigma_1$.

A.3 תוכנית מחשב עבור משחק הדרגה

בסעיף זה מוצגת תוכנית המחשב לחישוב חתכי ψ ו- θ_0 של מרחב המצב של המשחק, ודוגמת תדפיס תוצאות.

נתוני כניסה

- K - רדיוס התצפית.
- P - הזוית ψ במעלות (סימנה כמו סימן σ_1).
- T1 - ערך התחלתי ל- τ או ל- τ_t .
- DT - קפיצות ערך ל- τ או ל- τ_t .
- T2 - ערך סופי ל- τ או ל- τ_t .
- TE1 - ערך התחלתי ל- θ_0 במעלות (סימנו כמו סימן σ_1).
- DTE - קפיצות ערך ל- θ_0 במעלות.
- TE2 - ערך סופי ל- θ_0 במעלות.
- SCALE - קנה המידה של הציור (כופל את x, y).
- CODE - קוד לבחירת אופציות בתוכנית, לפי הטבלה שלהלן.

הערות/הסבר	SUB. NO.	σ_1	σ_2	הגדרת האופציה	CODE
	1400	1	-1	אזור a, מסלול Up	.1
	1200	1	-1	אזור a, EUS-tributary	.2
ראה ציורים	1200	1	1	אזור b, EUS-tributary	.3
4.3 ו-4.4 להגדרת האזורים	1400	-1	-1	אזור d, מסלול UP	.4
וטוגי המסלולים	1200	-1	-1	אזור d, EUS-tributary	.5
	1000	-1	0	EUS ⁻ (שמאלי)	.6
	1000	1	0	EUS ⁺ (ימני)	.7
	1400	-1	1	אזור c, מסלול UP	.8
	1200	-1	1	אזור c, EUS-tributary	.9
חישוב מנוסחא אנליטית	2000			נקודת PDS - צרוף aU-dU	.10
חישוב נומרי מנוסחא טרנסצנדנטלית בעלת משתנה אחד θ_0 .	2300			נקודת PDS - צרוף aU-dE	.11

הערות להפעלה:

1. בחירת ערכי θ_0 צריכה לקיים:

$$\sigma_1 \theta_0 < \sigma_1 \psi \quad (A.1)$$

2. התווית אזוכרונות (קוים שווי ערך τ_t) נעשית באמצעות קודים 1-5, כאשר ערך τ_t קבוע לכל אזוכרונה.

3. סימני θ_0 ו- ψ חייבים להיות כשל σ_1 .

4. באופציה 11, פותרים משוואה טרנסצדנטלית ב- θ_0^- , עיי ריצה של ערכי TE, עד לאיפוס הפונקציה F.

5. אופציות 10,11 מאפשרות התווית קטעים של PDS שלא באמצעות איזוכרונות.

נתוני יציאה:

כותרת, הפותחת באותיות SUB, המציינת את האופציה שנבחרה מטבלת הקודים.

D1, D2 - ערכי $\sigma_1 - \sigma_2$ בהתאמה, המתאימים לאופציה.

TE - ערך θ_0 השוטף.

F - פונקצית עזר המצביעה על התכנסות הפתרון באופציה 11.

הודעות: מיתוג של P: SWITCH P A1= . . .

מיתוג של E: SWITCH E A2= . . .

כאשר A2, A1 הן פונקציות המיתוג A, T_ψ של E, P בהתאמה.

נקודה מחוץ למרחב המשחק: OUTSIDE GAME SPACE

מסלול EUS-tributary לא תקף: INVALID MAS-EUS

מסלול UP לא תקף: INVALID MAS-UP

ערכי הטבלה: באופציות 1-9: τ, x, y

באופציות 10,11: θ_0^+, θ_0^-

x, y

```
5 REM GOD COMPUTES TETA0-SECTIONS OF THE GAME OF DEGREE
10 PRINT "K=";
20 INPUT K
30 PRINT K,"P=";
40 INPUT P
50 PRINT P,"T1=";
60 INPUT T1
70 PRINT T1,"DT=";
80 INPUT DT
90 PRINT DT,"T2=";
100 INPUT T2
110 PRINT T2,"TE1=";
120 INPUT TE1
130 PRINT TE1,"DTE=";
140 INPUT DTE
150 PRINT DTE,"TE2=";
160 INPUT TE2
170 PRINT TE2,"SCALE=";
180 INPUT N
190 PRINT N,"CODE=";
200 INPUT CC
210 PRINT CC,,,,,,,,
220 GOTO 300
240 REM MID ENTRANCE-CHANGE OF VARIABLES
250 PRINT "K=";K,"P=";P,"T1=";T1,"DT=";DT,"T2=";T2,"TE1=";TE1,
    "DTE=";DTE,"TE2=";TE2,"SCALE=";N,"CODE=";CC,,,,,,,,
300 LET PP=PXPI/180
310 LET TTE1=TE1XPI/180
320 LET TTE2=TE2XPI/180
330 LET DDTE=DTE*PI/180
340 IF CC=1 OR CC=2 OR CC=3 OR CC=7 THEN LET D1=1
350 IF CC=4 OR CC=5 OR CC=6 OR CC=8 OR CC=9 THEN LET D1=-1
```

```

360 IF CC=1 OR CC=2 OR CC=4 OR CC=5 THEN LET D2=1
370 IF CC=3 OR CC=8 OR CC=9 THEN LET D2=-1
400 IF CC=6 OR CC=7 THEN GOSUB 1000
410 IF CC=2 OR CC=3 OR CC=5 OR CC=9 THEN GOSUB 1200
420 IF CC=1 OR CC=4 OR CC=8 THEN GOSUB 1400
430 IF CC=10 THEN GOSUB 2000
440 IF CC=11 THEN GOSUB 2300
900 STOP
1000 REM SUB EUS COMPUTES TETA0-SECTION OF EUS
1010 PRINT "SUB EUS",, "D1=", D1, "D1,,,,,"
1020 FOR T=T1 TO T2 STEP DT
1030 LET X=(K-T)*SIN PP+D1*(1-COS T)
1040 LET Y=(K-T)*COS PP+SIN T
1050 PRINT T;TAB 7;NXX;TAB 19;NXY
1060 LET TTE=PP-D1*X
1070 LET A1=D1*(COS PP-COS TTE)/(COS TTE-1)
1080 IF SGN A1<>D1 THEN PRINT "SWITCH P-";A1-";A1
1120 NEXT T
1130 RETURN
1200 REM SUB MAS-EUS COMPUTES TETA0-SECTIONS OF TRAJECTORIES EVOLVING
    FROM EUS
1210 PRINT "SUB MAS-EUS",, "D1=", D1, "D2=", D2, "D1,,,,,"
1220 FOR I=TTE1 TO TTE2 STEP DDTE
1230 LET TTE=I
1240 PRINT "TE=";TTE;X180/PI,,,,
1260 FOR T=T1 TO T2 STEP DT
1270 LET C=K-D2*(TTE-PP)-(1+D1*D2)*X
1280 LET B=TTE+D1*X
1290 LET X=CXSIN B-D2*(COS B-COS PP)+D1*(1-COS T)
1300 LET Y=CXCOS B +D2*(SIN B-SIN PP)+SIN T
1310 PRINT T;TAB 7;NXX;TAB 19;NXY
1320 LET A1=D1*(COS B-COS TTE)/(COS TTE-1)
..

```



```

1330 LET TT=D2*(PP-TTE)-D1XD2XT
1340 LET A2=D2*(1-COS TT)/(1-COS TTE)
1350 IF SGN A1<>D1 THEN PRINT "SWITCH P-";A1="";A1
1360 IF SGN A2<>D2 THEN PRINT "SWITCH E-";A2="";A2
1365 IF XXX+YYY>KXX-0.00001 THEN PRINT "OUTSIDE GAME SPACE"
1370 IF D2*(TTE-PP)+(1+D1XD2)XT<0 THEN PRINT "INVALID MAS-EUS"
1387 NEXT T
1389 PRINT
1391 PRINT
1393 NEXT I
1395 RETURN
1400 REM SUB MAS-UP COMPUTES TETRA0-SECTIONS OF TRAJECTORIES EVOLVING
    FROM THE UP
1410 PRINT "SUB MAS-UP",D1,"D1,"D2,"D2,,,,,
1420 FOR I=TTE1 TO TTE2 STEP DDTE
1430 LET TTE=I
1440 PRINT "TE-";TTE*180/PI,,,,,
1460 FOR T=T1 TO T2 STEP DT
1470 LET B=TTE+D1XT
1480 LET A=PP-D2XT
1490 LET X=KXSIN B+D1*(1-COS T)-D2X(COS A-COS PP)
1500 LET Y=KXCOS B+SIN T+D2X(SIN A-SIN PP)
1510 PRINT T;TAB 7;NXX;TAB 19;NXY
1520 LET P0=PP-(D1+D2)XT
1530 LET A1=D1X(COS B-COS TTE)/(COS TTE-COS (P0-TTE))
1550 LET A2=D2X(COS (P0-TTE+D2XT)-COS (P0-TTE))/(COS TTE-COS (P0-TTE))
1570 IF SGN A1<>D1 THEN PRINT "SWITCH P-";A1="";A1
1580 IF SGN A2<>D2 THEN PRINT "SWITCH E-";A2="";A2
1590 IF XXX+YYY>KXX-0.00001 THEN PRINT "OUTSIDE GAME SPACE"
1600 IF P0TTE AND D2=-1 OR P0TTE AND D2=1 THEN PRINT "INVALID MAS-UP"
1660 NEXT T
1670 PRINT

```

```

1680 PRINT
1690 NEXT I
1700 RETURN
2000 REM SUB PDS UP+,UP- COMPUTES analytical SOLUTIONS FOR PDS
2010 PRINT "SUB PDS UP+,UP-"
2020 FOR T=T1 TO T2 STEP DT
2030 LET TTEP=PI+ARCSIN ((1-COS T)/K)-T
2040 LET TEM=-TTEP
2050 LET X=COS PP-COS (PP-T)
2060 LET Y=-SQR (K*K-(1-COS T)**2)+SIN T+SIN (PP-T)-SIN PP
2070 PRINT
2071 PRINT
2080 PRINT TTEP*180/PI,TEM*180/PI,NXX,NXY,,
2100 NEXT T
2110 RETURN
2300 REM SUB PDS UP+,EUS- COMPUTES TRANSCEDENTAL SOLUTIONS FOR PDS
2310 PRINT "SUB PDS UP+,EUS-"
2315 PRINT
2316 PRINT
2320 FOR T=T1 TO T2 STEP DT
2330 REM MID-ENTRANCE TETA-
2340 FOR I=TTE1 TO TTE2 STEP DDTE
2345 LET TEM=I
2350 LET C=K-TTEM+PP
2360 LET D=(CXCOS (TTEM-T))+SIN (TTEM-T)-SIN (PP-T))/K
2370 LET F=CXSIN (TTEM-T)-COS (TTEM-T)+COS (PP-T)-2+2XCOS T+KXSIN
  (ARCCOS D)
2380 LET TTEP=2*PI-ARCCOS D-T
2390 LET X=CXSIN (TTEM-T)-COS (TTEM-T)+COS PP-1+COS T
2410 LET Y=CXCOS (TTEM-T)+SIN (TTEM-T)-SIN PP+SIN T
2430 PRINT "F=",F,TTEP*180/PI,TEM*180/PI,NXX,NXY,,
2450 NEXT I
2460 NEXT T
2470 RETURN

```

K=6
P=-180
T1=0
DT=2
T2=5
TE1=-10
DTE=10
TE2=0
SCALE=1
CODE=9

SUB MAS-EUS
D1=-1

D2=-1

TE=-10

0.42769417

9.0044781

0 SWITCH P A1=0
OUTSIDE GAME SPACE
INVALID MAS-EUS

-5.0728523
-0.33541997

-1.087394
-2.1110323

4
TE=0

2.

9.1415927

0
-END OF FILE-

..

מ ק ו ר ו ת

- [1] BERNHARD, P., "Singular Surfaces in Differential Games", Differential Games and Applications, Edited by P. Hagedorn, H.W. Knobloch and G.J. Olsder, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.
- [2] BLAQUIERE, A., GERARD, F., and LEITMANN, G., "Quantitative and Qualitative Games", Academic Press, New-York and London, 1969.
- [3] DOBBIE, J.M., "Solution of Some Surveillance-Evasion Problems by the Methods of Differential Games", Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research, MIT, John Wiley and Sons, New-York, 1966.
- [4] ISAACS, R.P., "Differential Games", 2nd Edition, John-Wiley and Sons, New-York, 1975.
- [5] ISAACS, R.P., "The Theory of Collistion Avoidance Between Moving Craft", Unpublished. Formerly published in Hughes Aircraft Company, SRMI-189, 1958.
- [6] LEWIN, J., and BREAKWELL, J.V., "The Surveillance-Evasion Game of Degree", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 16, Nos. 3/4, 1975.
- [7] LEWIN, J., and OLSDER, G.J., "Conic Surveillance-Evasion", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 27, No. 1, 1979.
- [8] MERZ, A.W., "Homicidal Chauffeur, A Differential Game", Stanford University, Guidance and Control Laboratory, Report No. SUDAAR 418, 1971.
- [9] MERZ, A.W., "The Game of Two Identical Cars", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 9, No. 5, 1972.

- [10] MERZ, A.W., and HAGUE, D.S., "A Differential Game Solution to the Coplanar Tail-Chase Aerial Combat Problem", Aerophysics Research Corporation, NASA CR-137809, 1976.
- [11] MILOH, T., SHARMA, S.D., "Maritime Collision Avoidance as a Differential Game", Institute fur Schiffbau Der Universitat Hamburg, Bericht Nr. 329, 1975.
- [12] OLSDER, G.J., and BREAKWELL, J.V., "Role Determination in an Aerial Dogfight", International Journal of Game Theory, Vol.3, No. 1.
- [13] VINCENT, T.L., and PENG, W.Y., "Ship Collision Avoidance", Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Arizona, Tucson.
- [14] VINCENT, T.L., CLIFF, E.M., GRANTHAM, W.J., and PENG, W.Y., "Aircraft Collision Avoidance", Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Arizona, Tucson.
- [15] י. לויין, קורס במשחקים דיפרנציאליים, הפקולטה להנדסה אוירונאוטית, הטכניון, חיפה, 1982.
- [16] י. גרינפלד, "משחק דיפרנציאלי - התחמקות מתצפית במודל שתי מכוניות זהות", עבודת מגיסטר בהנדסת מכונות, הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה, מאי 1983.