

משחק דיפרנציאלי - התחמקות מתצפית במודל שתי מכוניות זהות

חיבור על מחקר
לשם מילוי חלקי של הדרישות
לקבלת תואר
מגיסטר למדעים
בהנדסת מכונות

מאת
ישראל גרינפלד

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מאי 1983

חיפה

סיוון תשמ"ג

המחקר נעשה בהנחיית ד"ר י. לויין בפקולטה להנדסת מכונות.

תודתי נתונה לד"ר י. לויין על הנחייתו הקפדנית, ובמיוחד על העומק שבו
הקנה לי את יסודות תורת המשחקים הדיפרנציאליים.

חב אני תודה לאישתי, עדי, על סבלנותה, ואולי דווקא על קוצר רוחה, שתרם
לסיום מהיר של העבודה.

תוכן העניינים

עמוד

1	תקציר
3	רשימת סמלים
6	רשימת מונחים וקצורים בעברית ובאנגלית
8	מילות מפתח
9	<u>פרק 1 : מבוא</u>
9	1.1 כללי
10	1.2 מטרת המחקר
10	1.3 סקר ספרות
14	1.4 תאור המחקר
15	<u>פרק 2 : הצגת בעיית ההתחמקות מתצפית</u>
15	2.1 מבוא
16	2.2 הגדרות
18	2.3 מערכות הצירים
18	2.4 מרחב המשחק
21	2.5 משוואות התנועה
22	2.6 נרמול משוואות התנועה
24	2.7 תאור גאומטרי של משוואות התנועה באמצעות וקטורגרות
30	2.8 הגדרת המשחק
33	<u>פרק 3 : פתרונות כלליים למשוואות המסלול</u>
33	3.1 מבוא
33	3.2 הבקרות האופטימליות והמשוואות הצמודות
39	3.3 המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי
40	3.4 משוואות המסלול האופטימלי - ריכוז הפתרונות

תוכן העניינים - המשך

עמוד

44	<u>פרק 4 : משחק הסוג - תאור המחסום</u>
44	4.1 מבוא
45	4.2 החלק השימושי
47	4.3 תנאי התחלה למחסום
52	4.4 מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות
54	4.5 משוואות הקו האוניברסלי EUL
56	4.6 משוואות המסלולים האופטימליים והקו הדיספרסלי PDL
59	4.7 תאור איכותי של המחסום המלא
62	4.8 תאור חתכי המחסום בערכי K שונים

69 פרק 5 : ניתוח המחסום

69	5.1 מבוא
69	5.2 ניתוח גאומטרי של המחסום
75	5.3 בדיקת המחסום
78	5.4 ניתוח הקו הדיספרסלי PDL
81	5.5 ניתוח הקו הדיספרסלי EBL

83 פרק 6 : סיכום

נספחים

85 נספח א' : תנאים הכרחיים במסלול אופטימלי סינגולרי

91 נספח ב' : פתרון המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי

91 B.1 פתרון המסלול עבור בקרות קיצון

96 B.2 פתרון המסלול עבור בקרת אפס ל-E

98 B.3 פתרון המסלול עבור תנאי התחלה פרמטריים

תוכן העניינים - המשך

עמוד

101	<u>נספח ג'</u> : שיטת הפתרון הנומרי
101	C.1 תהליך הפתרון הנומרי של משחק הסוג
101	C.2 תוכנית מחשב עבור משחק הסוג
106	<u>נספח ד'</u> : השוואה בין משחק ההתחמקות מתצפית למשחק הרדיפה
109	רשימת מקורות
I	תקציר באנגלית
	תוכן עניינים באנגלית

רשימת ציורים

עמוד

19	2.1	מערכות צירים במשחק שתי מכוניות זהות
20	2.2	מרחב המשחק
26	2.3	וקטוגרמות בדינמיקת שתי מכוניות זהות
46	4.1	החלק השימושי וגבולותיו
53	4.2	מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות במשחק הסוג במרחב האמיתי
60	4.3	תאור איכותי של המחסום במרחב המצב $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $K \geq \pi+2$
61	4.4	תאור איכותי של המחסום במרחק המצב $-\pi \leq \psi \leq \pi$, $K \geq \pi+2$
64	4.5	חתכי ψ של המחסום, $K = 6$, $-\pi \leq \psi \leq 0$
65	4.6	חתכי θ של המחסום, $K = 6$, $-\pi \leq \psi \leq 0$
66	4.7	חתכי ψ של המחסום, $K = \pi+2$, $-\pi \leq \psi \leq 0$
67	4.8	חתכי ψ של המחסום, $K = 12$, $-\pi \leq \psi \leq 0$
68	4.9	חתכי ψ של המחסום, $K = 100$, $-\pi \leq \psi \leq 0$
71	5.1	תאור ψ כפונקציה של K בנקודה B
74	5.2	תאור x, y כפונקציה של K בנקודה A', $K \geq \pi+2$
79	5.3	וקטוגרמות של PDL מחסום - מקרים ג', ד', $K = 6$
85	A.1	תאור המסלול הסינגולרי האופטימלי
108	D.1	חתך ψ אופייני סכימתי במשחק ההתחמקות מתצפית ובמשחק הרדיפה

תקציר

מחקר זה עוסק במשחק דיפרנציאלי של התחמקות מתצפית במודל שתי המכוניות הזהות.

משחקים דיפרנציאליים הם מודלים מתימטיים לבעיות של קונפליקט דינמי. הניסוח ושיטות הפתרון דומים לאלה של תורת הבקרה, אך בעלי יחודיות הנובעת מריבוי תופעות סינגולריות, ומרמת הסיבוך אף בבעיות פשוטות.

משפחת "שתי המכוניות" שייכת למשחקי מרדף בעלי שני שחקנים, רודף ומתחמק. במשפחה זו לכל שחקן מגבלת מהירות ומגבלת קצב פנייה. במודל זה נכללות בעיות בעלות היבט מעשי כמו מרדף אוירי, מרדף ימי, מניעת התנגשות וקביעת תפקיד, שהן בעלות רמת מורכבות גבוהה. מודל שתי המכוניות הזהות, השייך למשפחה זו, ובו לשני השחקנים קינמטיקה ומגבלות בקרה זהות, נושא אופי פשוט יותר.

רוב הבעיות שטופלו במחקרים עד היום עסקו בתפיסה, במובנה הישיר של הכנסת המתחמק לטווח התפיסה של הרודף. מעט מחקרים עסקו בבעיית ההתחמקות מתצפית, שבה מטרת הנרדף להתחמק מתוך טווח התצפית של הרודף. אף כי הקינמטיקה יכולה להיות זהה, מטרות השחקנים והגדרת מרחב המשחק שונים במהותם, ולכן מתקבל הבדל גדול בפתרונות. בעיית הרדיפה הרגילה, במשחק שתי המכוניות הזהות, בטווח תפיסה מעגלי, נפתרה בעבר ע"י A.Merz. מחקר זה עוסק בבעייה הדואלית, התחמקות מתצפית באותו מודל.

מוצג פתרון של משחק הסוג (Game of Kind), הכולל חלוקת מרחב המשחק לאזורי תפיסה והתחמקות באמצעות מחסום המפריד ביניהם. הפתרון בוצע בשיטות המקובלות בתורת המשחקים הדיפרנציאליים. הבטים אחדים של הפתרון מוצגים בצורה גראפית במרחב האמיתי ובמרחב המצב.

התמונות האופייניים המתקבלים מורכבים מפנייה בכיוון קבוע לרודף, ואילו למתחמק פנייה קבועה ולאחריה תנועה בקו ישר, השייכת לתופעה סינגולרית מטיפוס משטח אוניברסלי למתחמק. מטעמי סימטריה של גאומטריית המשחק, מתקבל גם אזור שבו לרודף קיימות שתי אופציות לבחירת הכיוון. זו סינגולריות הנקראת משטח דיספרסלי לרודף. תפרי המחסום המורכב נבחנו ונמצא שאינם נוזלים. בחלק מן התפריים נתגלתה התופעה שכונתה ע"י Isaacs הדילמה המושהית.

בניגוד לבעיית הרדיפה הרגילה, המחסום המורכב של בעיית ההתחמקות מתצפית רגיש לשינוי פרמטרי. עבודה זו מתרכזת בחקר המחסום עבור K (היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפניה המינימלי) גדול מ- $\pi+2$. להערכתנו, קיים אזור תפיסה סגור גם עבור $K < \pi+2$. תחום זה דורש מחקר נוסף.

הפתרון החלקי שבוצע במחקר זה, ואיפיון כיווני המשך המחקר, יכולים ללמד במשהו על הדואליות שבין בעיית הרדיפה הרגילה ובעיית ההתחמקות מתצפית, באותה הקינמטיקה. ניתן לאחד את שתי הבעיות למשחק תצפית מורחב. נדונו גם השימושים המעשיים של בעיית ההתחמקות מתצפית, במיוחד בערכי K נמוכים ובהקשר לבעיות מניעת התנגשות.

רשימת סמלים

- A - פונקציית המיתוג של P.
- A, B, C, C₁, C₂ - מקדמים.
- ε - גודל קטן כרצוננו.
- F_C(·) - משוואת המטרה.
- f(·) - וקטור המהירות.
- G(ε) - שיעור הקטנת אזור התפיסה.
- H(·) - המילטוניאן.
- K - רדיוס התצפית, או היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפנייה המינימלי.
- L(·) - אינטגרנד התמורה.
- v - הנורמל למחסום או למטרה.
- R - רדיוס הפנייה המינימלי של השחקנים.
- Rⁿ - מרחב אוקלידי n - ממדי.
- r₁ - רדיוס מסלול מעגלי.
- \bar{r}_1 - רדיוס וקטור במסלול מעגלי.
- s₁, s₂ - תנאי התחלה פרמטריים.
- σ_1 - הבקרה האופטימלית של P.
- σ_2 - הבקרה האופטימלית של E.
- sgn(·) - פונקציית הסימן.
- T(·) - הערך.
- T_f - הזמן לסיום המשחק.
- T_f(·) - תמורה.
- ∇T - גרדיאנט הערך.
- (T_x, T_y, T_ψ) - רכיבי גרדיאנט הערך בקואורדינטות קרטזיות.
- (T_r, T_θ, T_ψ) - רכיבי גרדיאנט הערך בקואורדינטות פולריות.

רשימת סמלים - המשך

∇T_0 - הערך ההתחלתי של גרדיאנט הערך.

t - זמן רגיל.

τ = זמן נסוג.

τ_t - הזמן הכולל לסיום המשחק.

τ_1 - זמן התחלתי על קו אוניברסלי.

τ_s - זמן מיתוג.

u - הבקרה של P .

v - הבקרה של E .

U, V - מרחב הבקרה של P ו- E בהתאמה.

u^*, v^* - אסטרטגיה אופטימלית, או אסטרטגיית מחסום, של P ו- E בהתאמה.

X - וקטור המצב.

X_0 - וקטור המצב ההתחלתי.

X_C - וקטור המצב על המטרה.

(x_I, y_I) - מערכת קרטזית קבועה במרחב האמיתי.

(x, y, ψ) - משתני המצב במערכת קרטזית יחסית.

(r, θ, ψ) - משתני המצב במערכת פולרית יחסית.

(x_1, y_1) - מיקום מרכז מסלול מעגלי.

W - המהירות, בערך מוחלט, של השחקנים.

אינדקסים

p - של משחק הרדיפה.

e - של משחק ההתחמקות מתצפית.

P - של הרודף.

E - של המתחמק.

o - ערך התחלתי.

רשימת סמלים - המשך

- C - ערך על המטרה.
- * - ערך אופטימלי.
- + - של אזור ימין.
- - של אזור שמאל.
- \sim - על מסלול סינגולרי אופטימלי.
- i - אינדקס כללי.
- ε - של ε , או שייך ל...
- s - במצב מיתוג.
- { } - קבוצה.
- \cdot - נגזרת לפי זמן רגיל t.
- \circ - נגזרת לפי זמן נסוג t.

רשימת מונחים וקיצורים בעברית ובאנגלית

	Zero-Sum differential game	משחק דיפרנציאלי בעל סכום אפס
	Partie	משחק (במובן מהלך)
	Player	שחקן
P	Pursuer	רודף (צופה)
E	Evader	מתחמק
	Game space	מרחב המשחק
S	State space	מרחב מצב
	Realistic space	מרחב אמיתי
C	Game termination (Boundary)	מטרת (גבול) המשחק
GOK	Game of Kind	משחק הסוג
GOD	Game of Degree	משחק הדרגה
	Surveillance-evasion	התחמקות מתצפית
	Control	בקרה
	Strategy	אסטרטגיה
	Payoff	תמורה
	The Value	הערך
ME	Main equation	משוואה עקרית
KE	Kinematic equations	משוואות התנועה
	Adjoint equations	המשוואות הצמודות
	Retrograde time	זמן נסוג
VP	Pursuer's vectogram	וקטוגרמת הרודף
VE	Evader's vectogram	וקטוגרמת המתחמק
VPE	Complete vectogram	וקטוגרמה כללית

רשימת מונחים - המשך

UP	Useable part	חלק שימושי
NUP	Non-useable part	חלק לא שימושי
BUP	Boundary of useable part	גבול החלק השימושי
B	Barrier	מחסום
CZ	Capture (Surveillance) zone	אזור תפיסה (תצפית)
EZ	Evasion zone	אזור התחמקות
EUL	Evader's universal line	קו אוניברסלי למתחמק
PDL	Pursuer's dispersal line	קו דיספרסלי לרודף
EDL	Evader's dispersal line	קו דיספרסלי למתחמק
SPS	Semi-permeable surface	משטח חצי חדיר
	Trajectory, Tributary, Path	מסלול

מילות מפתח

Differential games

משחקים דיפרנציאליים

Surveillance-evasion

התחמקות מתצפית

Two identical cars

שתי מכוניות זהות

Game of kind

משחק הסוג

Game of degree

משחק הדרגה

פרק 1 : מבוא

כללי 1.1

מחקר זה עוסק במשחק דיפרנציאלי של התחמקות מתצפית במודל שתי המכונות הזהות.

ניתן לנסח את הבעיה הכללית של התחמקות מתצפית באופן הבא: שני יריבים, השחקנים, נעים במרחב. לאחד, הרודף, יש אמצעי תצפית המאפשר לו לעקוב אחר יריבו, המתחמק. מטרת הרודף לצפות משך זמן רב ככל האפשר על המתחמק, ואילו מטרתו של המתחמק לברוח מאזור התצפית מהר ככל האפשר. תצפית למשך זמן בלתי מוגבל (תפיסה) מהווה נצחון לרודף, ואילו התחמקות היא נצחון למתחמק. לפיכך, משחק זה שייך לקטגוריה של משחק שני שחקנים - סכום אפס (Zero-Sum, Two-Players).

פרמטר חשוב נוסף נוגע לאופי המידע על מצב המשחק. במחקר זה נניח מידע מלא באשר למצב השחקנים בכל רגע. פירושה המעשי של הנחה זו הוא ידיעת המיקום וכיוון המהירות של השחקנים.

מודל המשחק מניח שברגע תחילת המשחק יש תצפית.

האיפיון של בעיית ההתחמקות כולל את מימד המשחק, גודל וצורת אזור התצפית ואופי הדינמיקה. במחקר שלפנינו נעסוק בתנועה במרחב האמיתי הדו-ממדי, כאשר אזור התצפית הוא עיגול בעל רדיוס נתון שמרכזו ברודף. הדינמיקה של שני היריבים זהה, ומורכבת ממהירות קוית קבועה נתונה, ויכולת בחירת קצב הפנייה, במגבלת קצב פנייה מקסימלי נתון.

בחירה זו של הפרמטרים מאפשרת מודל נוח לפתרון, אף כי מעט פשטני. היא מייצגת קבוצה של מקרים מעשיים, שבהם מדובר על כלי רכב דומים או זהים, שהיחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הסבוב שלהם קטן באופן יחסי. אם יחס זה אינו קטן, ברור אינטואיטיבית שהתחמקות כמעט שאינה אפשרית. נוכל לדמיין לעצמנו, לדוגמא, שתי צוללות, הנעות במים רדודים (על מנת לקיים מרחב אמיתי דו-ממדי), שרדיוס הסבוב שלהן גדול וטווח הסונר קטן. או, שתי אוניות גדולות, שטווח המכ"מ שלהן קטן, או מוגבל בגלל תנאי אטמוספירה (מזג אויר וכו'), או שהאניה הרודפת רוצה לקיים תצפית ראייה, שטווחה כמובן קצר, מטעמים מודיעיניים כלשהם.

תחום אחר של שימושים יכול להיות בבעיות של מניעת התנגשות, ימית או אורית. רדיוס התצפית, בהקשר זה, יהיה במובן של רדיוס סכנה, שהימצאות המתחמק בתוכו גורמת לסכנת התנגשות. קבוצת מקרים זו עונה לדרישה של רדיוס תצפית (=סכנה) קטן יחסית.

1.2 מטרות המחקר

- (1) חלוקת מרחב המשחק לשני אזורים - אזור התחמקות ואזור תפיסה, המופרדים במחסום. בעייה זו מכונה משחק הסוג (Game of Kind).
- (2) הגדרת האסטרטגיות האופטימליות לכל שחקן על פני המחסום, והתווית מסלולי התנועה הנובעים מהן.
- (3) ניתוח פרמטרי של המשחק, וזיהוי המצבים שבהם הפתרון שפוח במחקר זה אינו סגור.

1.3 סקר ספרות

סקר הספרות יתחלק לשנים - סקר על עבודות המבוססות על משחק שתי המכוניות, וסקר יותר ספציפי על בעיות התחמקות מתצפית. שני הסקרים רלוונטים לעבודה זו שהיא בעיית התחמקות מתצפית ובדינמיקה של שתי מכוניות זהות. יצויין גם שכמה מן העבודות מסווגות ולכן אינן מתפרסמות בעתונות הגלויה.

משחקים דיפרנציאליים הם מודלים מתימטיים לבעיות של קונפליקט דינמי. הניסוח המתימטי של המשחק נעשה בשיטות דומות לאלו של תורת הבקרה, באמצעות וקטורי המצב והבקרה, משוואות המצב ופונקציונל התמורה. שיטות הפיתרון, אף כי יש בהן דימיון לשיטות תורת הבקרה ולחשבון וריאציות, הינן יחודיות עקב ריבוי התופעות הסינגולריות והרגישות לשינוי הפרמטרים של הבעייה.

תורת המשחקים הדיפרנציאליים הוצגה בצורה מפורטת לראשונה ע"י ISAACS בספרו המפורסם [4], שיצא לראשונה ב-1965. בצד הפתרון הכללי של בעיית האופטימיזציה (הפתרון בקטן), וניסוח משחק הסוג (Game of Kind) ומשחק הדרגה (Game of Degree), יחודו של הספר בניתוח ואיפיון שיטתי של התופעות

הסינגולריות, וכן בגישתו המעשית המלווה בהרבה דוגמאות. BREAKWELL המשיך ופיתח את השיטה, ותרם רבות לאיפיון של תופעות סינגולריות נוספות. טיפול מתימטי יותר, אף כי פחות מקיף, נעשה ע"י BLAQUIERE et al [2], במיוחד בתחום הפתרון בקטן, וע"י BERNHARD [1], בתחום התופעות הסינגולריות, וכן ע"י חוקרים נוספים.

מטבע הדברים, הוסבה במיוחד תשומת הלב למרדפים (Games of Pursuit and Evasion). המרדפים מאופיינים ע"י שני שחקנים, הנעים במרחב אינסופי או מוגבל, בעלי שליטה כלשהיא על פרמטרים מדינמיקת התנועה שלהם כמו מהירות, רדיוס פנייה, תאוצה וכו', במגבלות פיזיקליות כמו מהירות מקסימלית, רדיוס פנייה מינימלי וכו'. עבור דינמיקה נתונה, ניתן לסווג את המרדפים לשתי קטגוריות. הראשונה, משחקי רדיפה, שבהם מטרת הרודף היא תפיסה ע"י הכנסת המתחמק לטווח ההשמדה של הרודף. בתחום זה בוצעו ופורסמו מחקרים רבים, שאחדים מהם יפורטו בהמשך. והקטגוריה השנייה, משחקי התחמקות מתצפית (להלן משחקי התחמקות), שבהם מטרת המתחמק בריחה מאזור תצפית. בתחום זה, שבו עוסק המחקר שלפנינו, בוצעו מחקרים מעטים.

ניתן לסווג את המרדפים לפי מורכבות המודל. מרבית המחקרים עסקו במרדפים במרחב האמיתי הדו-ממדי, בגלל הקושי לפתור בעיות מממד גבוה יותר. ברמה הנמוכה מצויים מרדפים שבהם לשחקנים יש הגבלת מהירות אך קצב פנייה אינסופי. משפחת מודלים פחות פשטנית היא משפחת הנהג הדורסן (The Homicidal Chauffeur), אשר הוגדרה לראשונה ע"י ISAACS [4] ונחקרה על ידו ועל ידי אחרים, במיוחד MERZ ו-BREAKWELL. ראה [8]. במשחק זה, לשחקן אחד יתרון במהירות אך הגבלה על קצב הפנייה ולשחקן השני נחיתות במהירות אך קצב פנייה אינסופי. מודל זה אינו פשוט לפתרון והוא עתיר בתופעות סינגולריות.

משפחת מודלים יותר מורכבים היא משחק שתי המכוניות (Game of Two Cars), אשר הוגדרה אף היא לראשונה ע"י ISAACS [4], ונחקרה על ידו וע"י אחרים. בגלל אופיה המציאותי, נחקרה בעייה זו רבות, בהבטים אחדים. בגלל רמת המורכבות הגבוהה, הבעייה טופלה בעיקר בתחום משפחת הסוג, כלומר הגדרת אזורי תפיסה והתחמקות. OLSDER and BREAKWELL [12] הרחיבו את משחק הסוג למקרה שתפקידי השחקנים, רודף-מתחמק, יכולים להתחלף, כפי שזה אופייני למשל בקרבות אוויר. בעייה זו קרויה קביעת תפקיד (Role Determination).

הם מצאו אזורי התחלה של ניצחון לשחקן אחד, אזורים של ניצחון לשחקן השני, ואזורי התחמקות. ניצחון, כאן, הוא במונח של השמדת היריב כאשר הוא נכנס לטווח ההשמדה המצוי בקידמת המשמיד (לדוגמא, במטוס, טווח התותחים). הגבולות בין האזורים הם משטחים סינגולריים מטיפוס מחסום (Barrier), שעליהם מתקיימת השמדה הדדית (Simultaneous Kill) או כמעט החטאה (Near Miss).

MERZ and HAGUE [10] מציגים גרסה מורכבת יותר של בעיית קביעת תפקיד, שבה ההשמדה מותנית בזוית מקסימום שבין כיווני המהירות של השחקנים. מעניינת התייחסותם לנושא הפתרונות הנומריים, אשר היוו נתח נכבד מעבודתם. הם מדגישים שאינם יודעים האם ניתן לתכנן "אוטומציה" מלאה של הבעייה הנומרית הכללית במשחק זה. לדוגמא, הם אומרים, שרק כ-30% מצירופי התמרונים שבדקו, היו רלוונטים לפתרון החלקי שהציגו בעבודתם. לטענתם, אוטומציה של הפתרון הנומרי אפשרית וכדאית רק בתחום של שינויים "קטנים" בערכי הפרמטרים. הבטים אלה של הפתרון הנומרי באים לידי ביטוי גם במחקר זה.

קבוצת מודלים נוספת בדינמיקת שתי המכוניות היא מניעת התנגשות (Collision Avoidance). בבעייה זו, לאור השימושים האזרחיים שלה, עסקו רבים. לראשונה, הוגדרה ונחקרה ע"י ISAACS [5]. נזכיר גם את VINCENT et al [14], בנושא מניעת התנגשות אורית, ואת MILOH and SHARMA [11], ו-VINCENT and PENG [13], בנושא מניעת התנגשות ימית. בבעייה זו מחפשים שלושה אזורים: אזור "ירוק", שבו לא אפשרית התנגשות אם המתחמק אינו משנה את כיוונו. אזור "צהוב", שבו אם המתחמק אינו משנה את כיוונו, התנגשות אפשרית, אך אם ינקוט תמרון התחמקות, ימנע התנגשות. אזור "אדום", שבו למרות כל תמרוני המתחמק, התנגשות אפשרית. בין האזורים מפרידים מחסומים.

בכל המחקרים האלה, מניחים שהרודף שואף, מתוך אי-ידיעת המצב, לגרום התנגשות. כמו כן, מגדירים כהתנגשות את חדירת הרודף לתוך אזור ההתנגשות של המתחמק, שהוא בדרך כלל מעגלי. במחקר זה, אנו מציעים גישה אפשרית אחרת לבעיית מניעת ההתנגשות, ע"י אנלוגיה לבעיית ההתחמקות מתצפית. נגדיר אזור סכנה מעגלי או אחר סביב הרודף, ונקבע שמטרת המתחמק לצאת את אזור הסכנה מהר ככל האפשר. גישה זו יכולה להשלים את הגישה המקובלת, במיוחד במצבים של כמעט התנגשות.

בעייה ספציפית אחרת במודל שתי המכוניות, היא מרדף שתי המכוניות הזרות, MERZ [9]. לבעייה זו זיקה ישירה למחקר זה משום הדינמיקות הזרות. הפתרון, אותו הוא מציג, הוא "חלק", באופן יחסי, וסגור. התמרונים האופייניים מורכבים מפנייה מתמדת למתחמק, ומפנייה, ולאחריה תנועה בקו ישר לרודף. התופעות הסינגולריות כוללות משטח אוניברסלי (Universal Surface) לרודף, ומשטח דיספרסלי (Dispersal Surface) למתחמק. ניתן לקבל מחסום סגור פשוט בכל מצב פרמטרי.

במחקר זה נראה, שלמרות הזרות בקינמטיקה בין בעיית הרדיפה ובעיית ההתחמקות, במודל שתי המכוניות הזרות, קיים הבדל ניכר בין השתיים. משתנים התמרונים האופייניים, ויש שוני בתופעות הסינגולריות. מתגלה רגישות לשינוי בערכי הפרמטרים. נספח ד' משווה במפורט את שני המשחקים.

מחקרים מעטים עסקו בבעיית ההתחמקות מתצפית. ISAACS עסק בה לראשונה, בשיתוף עם DOBBIE [3], אשר פתר את משחק הסוג שלה, בדינמיקת הנהג הדורסן. LEWIN and BREAKWELL [6] פתרו את משחק הדרגה באותה דינמיקה. הפתרון מורכב מאוד, וכולל תופעות סינגולריות רבות מסוג עקום דיספרסלי, עקום אוניברסלי, עקום פוקלי (Focal Line), מעטפת מיתוג (Switch Envelope), מחסום, וכן אזורים שבהם מהירות הרודף אופציונלית. מוצגים מקרים פרמטריים אחדים, בבנייה גאומטרית טהורה, אך מודגש שמחקר נומרי במחשב יכול לגלות תופעות נוספות עבור ערכים אחרים של הפרמטרים.

LEWIN and OLSDER פתרו מקרה נוסף [7] מקבוצה זו של משחקים. כאן, להבדיל מאזור תצפית מעגלי, נבחר אזור תצפית קוני (גזרה זוויתית). הפתרון כולל את משחק הסוג ומשחק הדרגה. גם כאן, כפי שזה אופייני בכל הבעיות בדינמיקת הנהג הדורסן, רבות התופעות הסינגולריות, ומופען תלוי בפרמטרים.

יצוין ששני המחקרים האחרונים שופכים אור מועט על הבעייה שבמחקר זה, אף כי הן שייכות לאותה קטגוריה, וזאת בגלל ההבדל המשמעותי בקינמטיקה של השחקנים.

המחקר המוצג בדו"ח זה עוסק במשחק שלא טופל עד כה. הוא מוסיף נדבך למשפחה המצומצמת יחסית של בעיות פתורות לא טריויאליות במשחקים דיפרנציאליים, ובמיוחד בתחום ההתחמקות מתצפית. לנושא עשויים להיות שימושים, אזרחיים וצבאיים. הוא חושף תופעות סינגולריות אחדות בעלות עניין כללי בתורת המשחקים הדיפרנציאליים. הוא מציע שימושים אחדים לבעיית ההתחמקות מתצפית, כמו גם בתחום מניעת התנגשות. הוא מספק חומר רב לעבודת מחקר נוספת, עיונית ושימושית.

בפתרון המתואר בעבודה זו נעשה שימוש בשיטות המתוארות בעבודות של ISAACS [4] וממשיכיו. פתרונות עבור ערכים ספציפיים הופקו בעזרת תוכנית מחשב, המתוארת בנספח לעבודה זו.

1.4 תאור המחקר

בשני הפרקים הראשונים מוגדרות הבעייה ותשתית ההגדרות של גאומטרית המשחק, הקינמטיקה וסוגי המשחקים. בפרק השלישי מוצגות המשוואות הדיפרנציאליות של המסלולים האופטימליים ופתרון עבור שני סוגי בקרות. בפרקים הרביעי והחמישי מוצג הפתרון של המחסום הסגור, המפריד בין אזור תפיסה לאזור התחמקות. מוצגת גאומטרית המחסום, איכותית וכמותית, ומנותחים הבטים גאומטריים אחדים.

לעבודה ארבעה נספחים. בנספח א' מתוארים התנאים ההכרחיים לקיום מסלול סינגולרי אופטימלי. בנספח ב' מוצגת דרך הפתרון של המשוואות הדיפרנציאליות של המסלולים האופטימליים. בנספח ג' מתוארת שיטת הפתרון הנומרי של משחק הסוג ותוכנית המחשב הנלווית אליה. בנספח ד' מוצגת השוואה בין משחק הרדיפה למשחק ההתחמקות.

פרק 2 : הצגת בעיית ההתחמקות מתצפית

2.1 מבוא

בפרק זה נציג וננסח את בעיית ההתחמקות מתצפית במשחק שתי המכונות הזהות.

שני עצמים (שחקנים), דוגמת אוניות או מכונות, נעים במרחב אמיתי (Realistic Space) דו-ממדי. לשניהם דינמיקה זהה, הכוללת מהירות (בערך מוחלט) קבועה, ויכולת פנייה, תחת מגבלת רדיוס פנייה מינימלי. בקרתו של כל שחקן שולטת על קצב הפנייה בלבד. בכל רגע, לכל שחקן יש מידע מלא על מצב המשחק, דהיינו על מיקומו ומיקום יריבו, אך אין לו מידע על בקרתו הרגעית של היריב.

השחקן האחד, שיכונה הרודף (הצופה), נושא אמצעי תצפית (מכ"מ, משקפת וכו') בעל רדיוס גילוי מקסימלי נתון. השחקן השני, שיכונה המתחמק, נמצא בתחילת המשחק בתוך אזור התצפית של הרודף, או על גבול אזור זה, והוא שואף להתחמק ממנו במינימום זמן. יריבו הרודף ישאף למנוע את התחמקותו כליל, או לחליפין - אם אין ביכולתו למנוע זאת - ישאף להשהות את המתחמק תחת תצפיתו למשך מקסימום זמן.

במהלך משחק ינוע המצב לאורך מסלול, שמהלכו יקבע ע"י המצב ההתחלתי ורצף ההחלטות (הבקרות) של כל שחקן. שחקן יכול לבחור מראש להשתמש באסטרטגיה, המגדירה את בקרתו בכל מצב אפשרי של המשחק. בפתרון המשחק, נניח שהשחקנים משתמשים באסטרטגיות אופטימליות, כפי שתוגדרנה בהמשך.

נבדיל בין שתי גירסאות של המשחק:

משחק הסוג (Game of Kind) - שבו נחפש אזורי התחמקות ותפיסה במרחב המשחק, ואת המחסום המפריד ביניהם.

משחק הדרגה (Game of Degree) - שבו נתווה מסלולים אופטימליים באזור ההתחמקות.

שני המשחקים עומדים כל אחד בפני עצמו. פתרונם מאפשר כיסוי מלא של כל המרחב הרלוונטי באסטרטגיות אופטימליות.

פרק זה כולל את הניסוח הפורמלי המתמטי של הבעיה, בסיוע ISAACS [4] ולוין [15]. הפרק כולל הגדרות יסוד, מערכות צירים, הגדרת מרחב המשחק וגבולותיו, משוואות התנועה - מימדיות וחסרות מימד, ותאור גאומטרי באמצעות וקטורגרות.

2.2 הגדרות

יהיו השחקנים:

P השחקן הרודף (הצופה).

E השחקן המתחמק.

יהי $S, S \in \mathbb{R}^n$, מרחב המצב של המשחק. \mathbb{R}^n הוא מרחב אוקלידי n ממדי. המימד n יקבע לפי מערכת הקואורדינטות שבשימוש.

יהי $X, X \in S$, וקטור המצב של המשחק.

יהי $C, C \in S$, גבול המשחק, או משטח המטרה של המשחק.

תהיינה: u הבקרה של P ו- v הבקרה של E .

$$u \in U, \quad |u| \leq 1 \quad (2.1)$$

$$v \in V, \quad |v| \leq 1$$

כאשר U ו- V הם מרחבי הבקרה של P ו- E בהתאמה.

יהיו:

- W המהירות, בערך מוחלט, של השחקנים.
- R רדיוס הפנייה המינימלי של השחקנים.
- Wu/R קצב הפנייה של P .
- Wv/R קצב הפנייה של E .
- K רדיוס התצפית של P .

יצוין שבקרות השחקנים שולטות על קצבי הפנייה בלבד, ואילו המהירות בערכה המוחלט נשארת קבועה.

יהי t משתנה הזמן הרגיל. נשתמש גם במשתנה הזמן הנסוג τ . הקשר בין שניהם:

$$\tau = T_f - t \quad (2.2)$$

כאשר T_f הוא הזמן עד לסיום המשחק.

נסמן ב- \dot{x} נגזרת של משתנה כלשהוא x לפי הזמן הנסוג τ .

$$\dot{x} \equiv dx/d\tau \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = -\dot{x} \quad (2.4)$$

יהי $X_0 \in S$, X_0 תנאי ההתחלה של מצב המשחק. תנאי ההתחלה יבוטאו בדרך כלל בזמן הנסוג $(\tau = 0)$.

2.3 מערכות הצירים

ציור 2.1 מציג 3 מערכות צירים:

מערכת קבועה (x_I, y_I) , במרחב האמיתי, בעלת וקטור המצב הבא:

$$X \equiv (x_P, y_P, \psi_P, x_E, y_E, \psi_E)$$

מערכות הצמודות לוקטור המהירות של P , במרחב היחסי:

מערכת קרטזית (x, y) בעלת וקטור המצב:

$$X \equiv (x, y, \psi)$$

מערכת פולרית (r, θ) בעלת וקטור המצב:

$$X \equiv (r, \theta, \psi)$$

בעבודה זו נשתמש בעיקר במערכות הקרטזית והפולרית, במרחב היחסי.

2.4 מרחב המשחק

ציור 2.2 מתאר את מרחב המשחק במערכות היחסיות, הקרטזית והפולרית. מצוירת נקודה X כלשהיא בתוך המרחב S , ומוגדרות הקואורדינטות שלה בשתי המערכות.

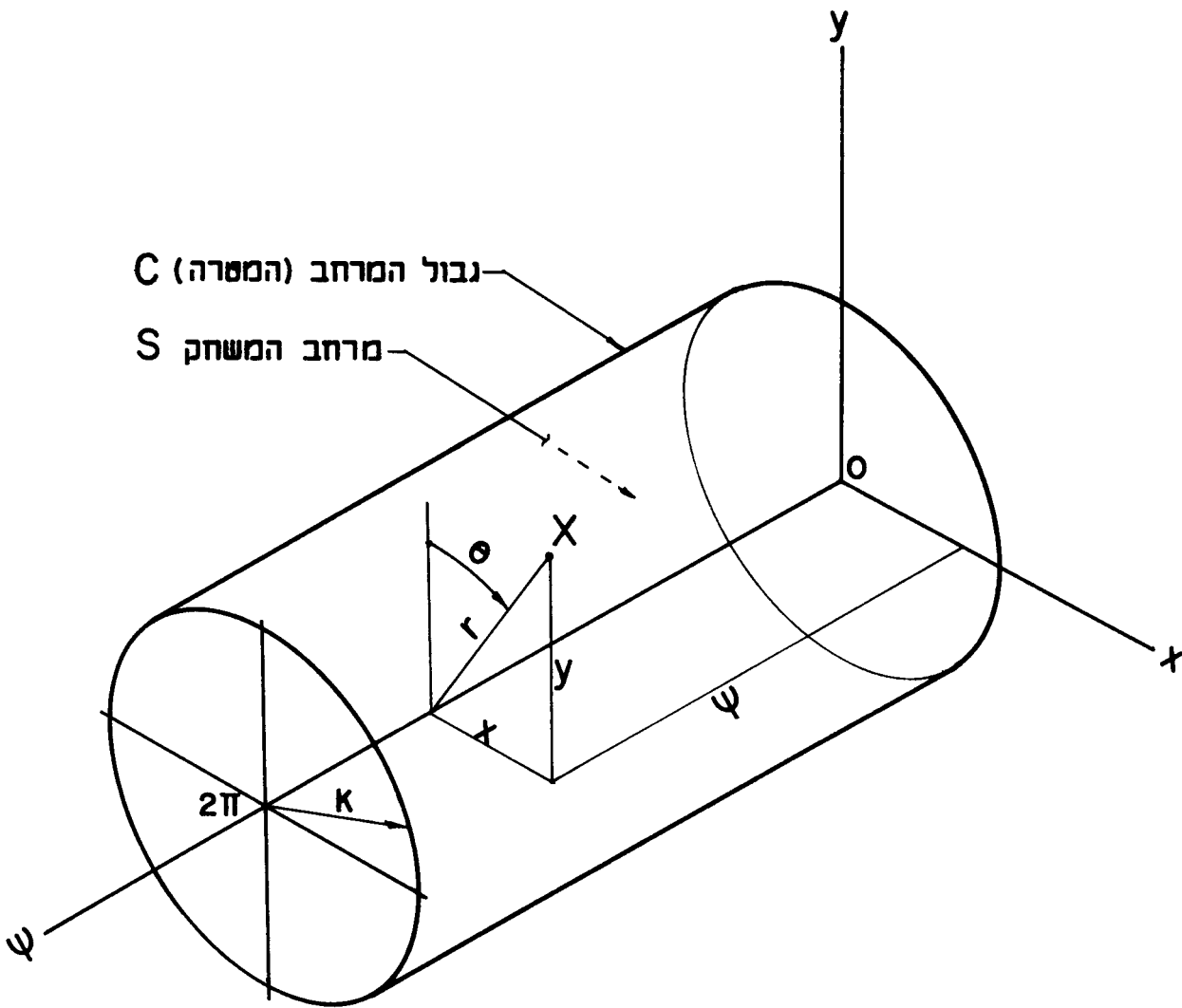
מרחב המשחק הוא גליל, שרדיוסו K , וציר הסימטריה שלו ψ .

גבול מרחב המשחק הוא C ומשוואתו:

$$F_C \equiv x_C^2 + y_C^2 - K^2 = 0 \quad \text{קרטזית:} \quad (2.5)$$

$$F_C \equiv r_C - K = 0 \quad \text{פולרית:}$$

$$2\pi \geq \psi \geq 0 \quad \text{או} \quad \pi \geq \psi \geq -\pi$$



ציור 2.2 : מרחב המשחק.

Fig. 2.2 : The game space.

אין חשיבות למיקום קצותיו של הגליל (ה'פדחות') מאחר שהזווית ψ היא מחזורית ב- 2π . למעשה, ניתן להסתכל על מרחב המשחק כעל טורוס, שבו הפדחות $\psi = 0$ ו- $\psi = 2\pi$ מתלכדות.

2.5 משוואות התנועה

משוואות התנועה בצורתן הכללית:

$$\dot{X} = f(X, u, v) \quad (2.6)$$

נציג את משוואות התנועה בשלוש מערכות הצירים. הדינמיקה היא דינמיקת שתי מכוניות זהות.

משוואות התנועה במרחב האמיתי:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= W \sin \psi_P \\ \dot{y}_P &= W \cos \psi_P \\ \dot{\psi}_P &= Wu/R \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_E = W \sin \psi_E$$

$$\dot{y}_E = W \cos \psi_E$$

$$\dot{\psi}_E = Wv/R$$

בגלל המימד הגבוה של מערכת זו ($n = 6$), ומאחר שקיימת חשיבות רק למצב היחסי בין השחקנים, לא נשתמש בה בהמשך.

משוואות התנועה במרחב היחסי:

במערכת קרטזית (ראה גם אצל ISAACS [4] ו-MERZ [9]):

$$\dot{x} = W(\sin\psi - uy/R)$$

$$\dot{y} = W(\cos\psi - 1 + ux/R) \quad (2.8)$$

$$\dot{\psi} = W(v-u)/R$$

במערכת פולרית:

$$\dot{r} = W(\cos(\psi-\theta) - \cos\theta)$$

$$\dot{\theta} = W[-u + R(\sin\theta + \sin(\psi-\theta))/r]/R \quad (2.9)$$

$$\dot{\psi} = W(v-u)/R$$

בהמשך, אשתמש לסירוגין בשתי המערכות (2.8) ו-(2.9), בהתאם לתכונותיהן המיוחדות. בעיקר אשתמש במערכת הקרטזית.

2.6 נרמול משוואות התנועה

כדי לפשט את הפיתוח בהמשך, נהפוך את משוואות התנועה (2.8) ו-(2.9) למשוואות חסרות מימד (מנורמלות).

נחליף את כל מרכיבי המשוואות בגדלים חסרי המימד הבאים:

$$x/R \rightarrow x$$

$$y/R \rightarrow y$$

$$K/R \rightarrow K$$

$$\dot{x}/W \rightarrow \dot{x} \tag{2.10}$$

$$\dot{y}/W \rightarrow \dot{y}$$

$$\dot{\psi}/(W/R) \rightarrow \dot{\psi}$$

$$t(W/R) \rightarrow t$$

הנרמול נעשה בצורה פשוטה אם נצלב במשוואות:

$$W = 1 \tag{2.11}$$

$$R = 1$$

משוואות התנועה המנורמלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\dot{x} = \sin\psi - uy$$

$$\dot{y} = \cos\psi - 1 + ux \tag{2.12}$$

$$\dot{\psi} = v - u$$

משוואות התנועה המנורמלות בקואורדינטות פולריות:

$$\dot{r} = \cos(\psi - \theta) - \cos\theta$$

$$\dot{\theta} = -u + (\sin\theta + \sin(\psi - \theta))/r \quad (2.13)$$

$$\dot{\psi} = v - u$$

הנרמול נעשה ללא אובדן אינפורמציה. המעבר ממשתנה חסר מימד למשתנה אמיתי נעשה דרך הקשר (2.10). לדוגמא, כדי לעבור מזמן חסר מימד לזמן אמיתי, נכפול את הזמן חסר המימד ב-R/W.

ניתן לראות שמשוואות התנועה אינן כוללות כל פרמטר. הפרמטר היחיד שנותר בבעייה מופיע במשוואת המטרה (2.5), ובאמצעותו נבצע בהמשך ניתוח פרמטרי.

2.7 תאור גאומטרי של משוואות התנועה באמצעות וקטורגרות

2.7.1 הגדרת הוקטורגרות

מושג הוקטורגרות הומצא ע"י ISAACS [4]. הוקטורגרות המוצגות בסעיף זה אינן מצויות בספרות שבדקתי.

נבטא את משוואות התנועה הכלליות (2.6) בצורה ספרבילית:

$$\dot{X} = f_P(X, u) + f_E(X, v) \quad (2.14)$$

תהיגבה VP ו-VE הוקטורגרות של P ו-E בהתאמה:

$$VP \equiv \{\dot{X} \mid \dot{X} = f_P(X, u), u \in U\} \quad (2.15)$$

$$VE \equiv \{\dot{X} \mid \dot{X} = f_E(X, v), v \in V\}$$

תהי VPE הוקטוגרמה המלאה של הדינמיקה:

$$VPE \equiv \{X \mid \dot{X} = f(X,u,v), u \in U, v \in V\} \quad (2.16)$$

הוקטוגרמות מבטאות את רכיבי וקטור המהירות של מצב המשחק, כאשר VP מתארת את הרכיב שבשליטתו של P ו-VE את רכיבו של E.

בדינמיקת שתי המכונות הזרות (2.12), נגדיר את הוקטוגרמות הבאות:

הוקטוגרמה VP של P:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -uy \\ \dot{y} &= -1+ux & |u| &\leq 1 \\ \dot{\psi} &= -u \end{aligned} \quad (2.17)$$

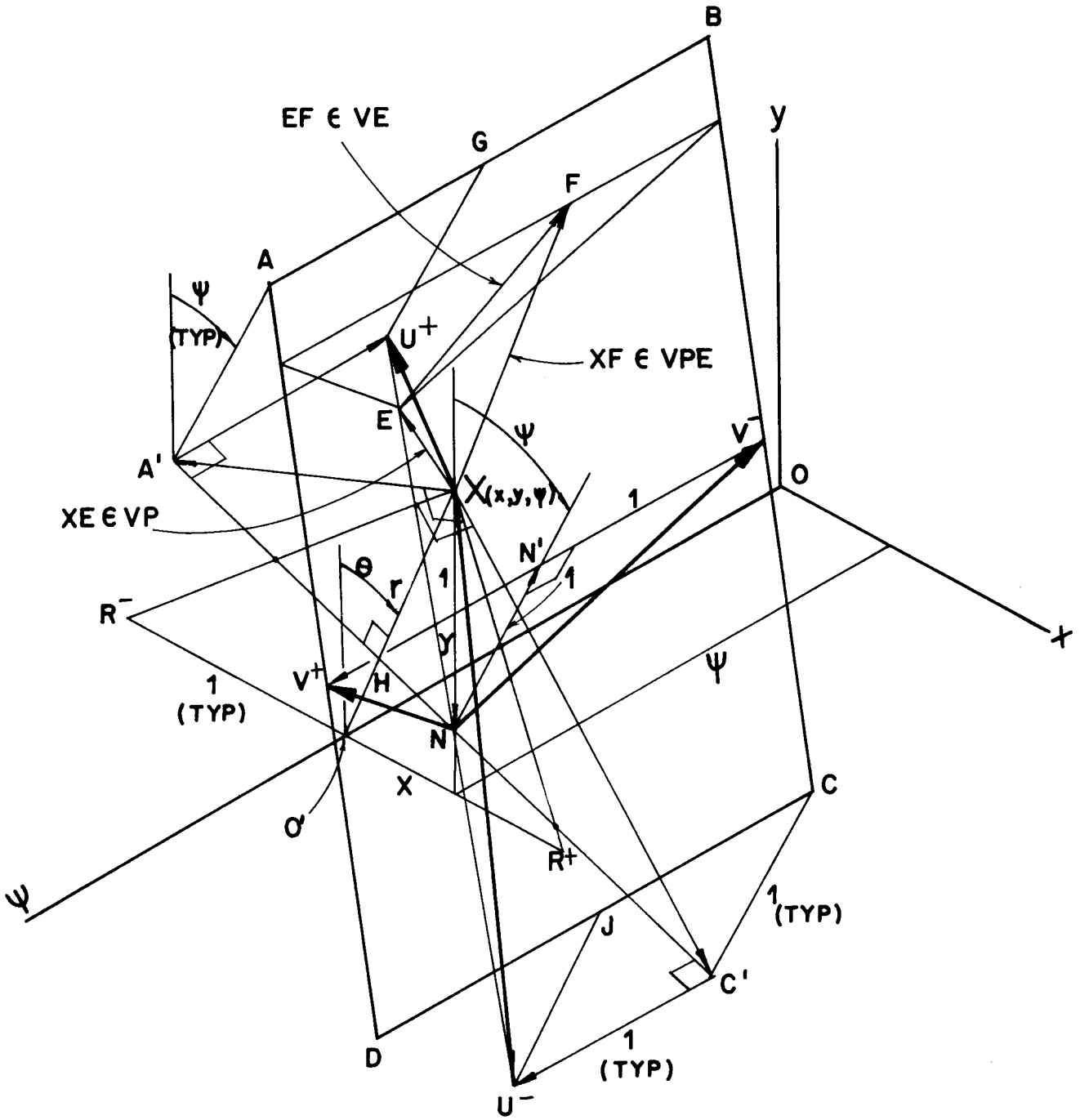
הוקטוגרמה VE של E:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin\psi \\ \dot{y} &= \cos\psi & |v| &\leq 1 \\ \dot{\psi} &= v \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.7.2 תאור גאומטרי של הוקטוגרמות

ציור 2.3 מתאר בצורה מרחבית את הוקטוגרמות בדינמיקת שתי מכונות זהות, עבור הנקודה $X(x,y,\psi)$.

הוקטוגרמה VP של P היא אוסף כל הוקטורים שראשיתם בנקודה X וקודקודם על הקטע הישר U^+U^- . לדוגמא מתואר הוקטור XE . הוקטורים הקיצוניים של VP הם:



ציור 2.3 : וקטורמות בדינמיקת שתי מכוניות זהות.

Fig. 2.3 : Vectograms in the dynamics of two identical cars.

XU^+ - מתקבל מפנייה ימינה ($u = 1$) של P.
 XU^- - מתקבל מפנייה שמאלה ($u = -1$) של P.

הוקטורגרמה VE של E הוא אוסף כל הוקטורים שראשיתם בנקודה N, או בנקודה אחרת על הקטע U^+U^- , וקודקודם על הקטע הישר V^+V^- , או על העתקה מקבילה שלו בהתאם. לדוגמא מתואר הוקטור EF. הוקטורים הקיצוניים של VE הם:

NV^+ (או העתקה מקבילה שלו) - מתקבל מפנייה ימינה ($v = 1$) של E.
 NV^- (או העתקה מקבילה שלו) - מתקבל מפנייה שמאלה ($v = -1$) של E.

הוקטורגרמה המלאה VPE של הדינמיקה היא אוסף כל הוקטורים שראשיתם בנקודה X וקודקודם על שטחה של המקבילית המישורית ABCD. לדוגמא מתואר הוקטור $XF = XE + EF$. הוקטורים הקיצוניים של VPE מתקבלים משילוב בקרות קיצוניות של השחקנים. ראשיתם בנקודה X וקודקודם בפינות המקבילית ABCD. הוקטורים XA ו-XC שומרים על ψ קבוע.

הבנייה הגאומטרית

נתונה הנקודה (וקטור המצב) $X(x, y, \psi)$

בניית הוקטורגרמה של P

(1) מ-X נוריד את הקטע $XN = 1$ בכיוון $-y$, ונסמן את הנקודה N.

(2) נסמן את הרדיוס $O'X = r$, והזווית θ .

(3) נסמן את מרכזי הסיבוב R^+ ($u=1$) ו- R^- ($u=-1$) המינימליים של P, הנמצאים במישור ψ ומרחקם מ- O' הוא ± 1 . נסמן את קרני הסבוב R^+X ו- R^-X . המשולש R^-XR^+ כולל בתוכו את \bar{x} וביצב לציר ψ .

(4) מהנקודה N נמתח קרן, הניצבת ל-x בנקודה H, וכלולה במישור המשולש R^-XR^+ .

(5) מהנקודה X נמתח קרן הניצבת לקרן הסכוב R^-X וקרן הניצבת לקרן הסכוב R^+X . שתי הקרניים כלולות במישור R^-XR^+ .

(6) מחיתוך הקרניים מסעיפים (4) ו-(5) נקבל את הנקודות A' ו-C'. המשולש A'XC' מגדיר את הוקטורמה של P בהיטל על המישור xy.

(7) מהנקודות A', C' נמשוך את הקטע $A'U^+ = 1$ בכיוון $-\psi$, ואת הקטע $C'U^- = 1$ בכיוון $+\psi$, ונסמן את הנקודות U^+ ו- U^- . המשולש U^+XU^- מגדיר את הוקטורמה המלאה של P.

בניית הוקטורמה של E והוקטורמה המלאה

(8) מהנקודה N נתווה את הקטע $NN' = 1$ היוצר זווית ψ עם הציר y, וכלול במישור המשולש R^-XR^+ .

(9) מהנקודה N' נמשוך את הקטעים $N'V^+ = N'V^- = 1$ בכיוון $\pm\psi$, ונסמן את הנקודות V^+ ו- V^- . המשולש NV^+V^- מגדיר את הוקטורמה המלאה של E.

(10) נסיט את המשולש NV^+V^- במקביל לעצמו לאורך הקטע U^+U^- ונקבל את המקבילית ABCD. הפירמידה XABCD מגדירה את הוקטורמה המלאה של הדינמיקה.

הוכחת הבנייה

סיבוב של P ימינה במרחב האמיתי ברדיוס $R = 1$, אקוילונטי לסכוב X שמאלה במרחב המצב סביב הנקודה R^+ . לפיכך יתקבל וקטור מהירות XA' שאורכו:

$$XA' = \frac{W}{O'R^+} \cdot XR^+ = \frac{W}{R} \cdot XR^+ \quad (2.19)$$

במשולשים $A'XN$ ו- $O'XR^+$ יתקיים $(W = R = 1)$:

$$XA' = XR^+ \quad , \quad XA' \perp XR^+ \quad (2.20)$$

$$XN = O'R^+ = 1 \quad , \quad XN \perp O'R^+$$

לפיכך, שני המשולשים חופפים, ולכן גם:

$$A'N = O'X = r, \quad A'N \perp O'X \quad (2.21)$$

בצורה דומה ניתן להוכיח עבור הוקטור XC' . עבור כל רדיוס פנייה גדול מ-1 נקבל וקטור שראשיתו ב-X וקודקודו על הקטע $A'C'$ (ההוכחה דומה). יתר הבניות נובעות ישירות ממשוואות הוקטוריות (2.17) ו-(2.18).

הערה:

המישור של המקבילית ABCD מקביל לציר ψ וניצב ל- $O'X = r$.

הוכחה: הקטע V^+V^- מקביל בהגדרה ל- ψ . מישור המקבילית נוצר ע"י העתקה מקבילה של V^+V^- , ולכן הוא מקביל ל- ψ .

מאחר שמישור המשולש R^-XR^+ מאונך בהגדרה ל- ψ , מישור המקבילית יהיה ניצב למישור המשולש. הקטע r כלול במשולש, וניצב בהגדרה לקטע $A'C'$. הקטע $A'C'$ מקביל למישור המקבילית, מאחר ששני הקטעים $A'A$ ו- $C'C$ מקבילים זה לזה ואורכם שווה. מאחר ש- $A'C'$ כלול במישור המשולש R^-XR^+ , יתקבל שמישור המקבילית ניצב ל- r .

2.7.3 תכונות כלליות

הוקטוגרמות במשחק זה קמורות (Convex), אך לא קמורות לחלוטין (Strictly Convex). כל וקטור השייך להן מתקבל מצרוף קמור (Convex Combination) של וקטורי הקיצון. לדוגמא, אם P יבחר סבוב ימינה ברדיוס R/u , יתקבל וקטור אופייני X_E , שערכו:

$$X_E = \frac{1+u}{2} \cdot XU^+ + \frac{1-u}{2} \cdot XU^- \quad (2.22)$$

כאשר

$$\frac{1+u}{2} + \frac{1-u}{2} = 1$$

עבור $u = \pm 1$ יתקבלו וקטורי הקיצון. עבור $u = 0$ יתקבל הוקטור X_N .

תכונת הקמירות גורמת להופעת וקטורי קיצון יחידים (Unique). יחד עם זאת, מאחר שהוקטוגרמות אצלנו אינן קמורות לחלוטין יתכנו גם ערכי ביניים.

בעבודה זו נשתמש לפעמים בוקטוגרמות כדי לתאר ולהסביר גאומטרית מצבים מיוחדים במשחק.

2.8 הגדרת המשחק

נגדיר בנפרד את משחק הסוג ומשחק הדרגה. פתרונו של האחד אינו מותנה בפתרונו של השני.

2.8.1 משחק הסוג (Game of Kind)

תהי מטרת P תפיסה (תצפית) ומטרת E התחמקות מתצפית.

יהי אזור ההתחמקות EZ אוסף כל נקודות ההתחלה X_0 שמהן E יכול להבטיח לעצמו התחמקות תוך פרק זמן סופי.

יהי אזור התפיסה CZ האזור המשלים ל-EZ.

יהי המחסום B משטח הגבול המפריד בין CZ ל-EZ. המחסום הוא משטח חצי חדיר (SPS, על פי ISAACS).

תהינה u^* ו- v^* האסטרטגיות האופטימליות של P ו-E בהתאמה, על פני המחסום. נקיטת אסטרטגיה אופטימלית מבטיחה לשחקן אי חדירה לאזור של יריבו. אסטרטגיות אלו תכוננה אסטרטגיות המחסום.

פתרון משחק הסוג מתמקד בבניית המחסום כמשטח חצי חדיר מורכב, סגור ולא נוזל, על פי שיטתו של ISAACS, והתוית אסטרטגיות המחסום ומסלולי המחסום.

2.8.2 משחק הדרגה (Game of Degree)

משחק הדרגה מוגדר בתוך אזור ההתחמקות EZ.

תהי מטרת P תפיסה (תצפית) למשך זמן מקסימלי, ומטרת E התחמקות מתצפית תוך משך זמן מינימלי.

תהי תמורת (Payoff) המשחק, $T_f(\cdot)$, משך המשחק עד לגמר:

$$T_f(X_0, u(t), v(t)) = \int_0^{T_f} 1 dt = T_f \quad (2.23)$$

תהינה u^* ו- v^* האסטרטגיות האופטימליות של P ו-E בהתאמה. סטייה של שחקן מהאסטרטגיה האופטימלית שלו לא תביא לו יתרון. האסטרטגיות האופטימליות מוגדרות ע"י אי שיויון האוכף:

$$T_f(X_0, u, v^*) \leq T(X_0) \leq T_f(X_0, u^*, v) \quad (2.24)$$

כאשר $T(X_0)$ הוא הערך (Value) של המשחק, המוגדר ע"י:

$$T(X_0) \equiv \min_{v \in V} \max_{u \in U} T_f(X_0, u, v) = T_f(X_0, u^*, v^*) \quad (2.25)$$

פתרון משחק הדרגה מתמקד במציאת האסטרטגיות האופטימליות באזור ההתחמקות, על פי שיטתו של ISAACS, והתויית המסלולים האופטימליים.

פרק 3 : פתרונות כלליים למשוואות המסלול

3.1 מבוא

פרק זה מציג את הפתרונות הכלליים למשוואות המסלול. הבסיס התאורטי מתוך ISAACS [4] ולויין [15].

מוגדרים תנאים הכרחיים לקיום אופטימום, המבוססים על משוואות ISAACS. התנאי הראשון הוא תנאי נקודת האוכף (Saddle-Point), אשר, יחד עם מגבלות הבקרה, מספק מועמדים לאסטרטגיות אופטימליות. בהנחת קיום אסטרטגיות אופטימליות התנאי השני הוא המשוואות הצמודות, אשר, יחד עם משוואות התנועה (האילווצים), מהוות מערכת של משוואות דיפרנציאליות רגילות לא-לינאריות מסדר ראשון עם תנאי התחלה. תנאי ההתחלה נתונים בנקודת הסיום בזמן אמיתי, ולכן המשוואות מוצגות בזמן נסוג. הפתרון של המשוואות נעשה ע"י אינטגרציה לאחור.

המשוואות מבוססות על הנחות אחדות של קיום ורציפות, שעליהן להבדק גלובלית עם השלמת פתרון סגור למלוא מרחב המשחק. מאחר שהבקרות האופטימליות מתקבלות כבקרות קיצון התלויות בפונקציות מיתוג, קיים קושי לפתור את המשוואות הדיפרנציאליות על פני אזורי אי-רציפות בבקרות, ולכן נדרוש עבורם תנאים הכרחיים מיוחדים.

3.2 הבקרות האופטימליות והמשוואות הצמודות

נפתח תחילה עבור משחק הדרגה, ובהמשך נציג את האנלוגיה למשחק הסוג.

3.2.1 הניסוח התאורטי

יהי ההמילטוניין H פונקציה סקלרית המוגדרת:

$$H(X, \nabla T, u, v) \equiv \nabla T \cdot f(X, u, v) + L(X, u, v) \quad (3.1)$$

כאשר:

∇T גרדיאנט הערך של המשחק.

$L(\cdot)$ אינטגרנד התמורה.

$f(\cdot)$ וקטור המהירות לפי (2.6).

תנאי הכרחי ראשון לאופטימליות הוא המשוואה העיקרית הראשונה ME1 לפי ISAACS, המתארת נקודת אוכף:

$$\min_{v \in V} \max_{u \in U} H(X, \nabla T, u, v) = 0 \quad (3.2)$$

תהיינה u^*, v^* מועמדות (Candidates) לאסטרטגיות אופטימליות המקיימות את ME1 (3.2). הן תקיימנה גם את המשוואה העיקרית השנייה ME2 לפי ISAACS:

$$H^* \equiv H(X, \nabla T, u^*, v^*) = 0 \quad (3.3)$$

תנאי הכרחי שני לאופטימליות הוא המשוואות הצמודות:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\nabla T) &= - \frac{\partial}{\partial X} H(X, \nabla T, u^*, v^*) = \\ &= -\nabla T \cdot \frac{\partial}{\partial X} f(X, u^*, v^*) - \frac{\partial}{\partial X} L(X, u^*, v^*) \end{aligned} \quad (3.4)$$

שני התנאים האחרונים, (3.3) ו-(3.4), מתקיימים לאורך מסלולים אופטימליים.

התנאים שלעיל משתמשים בהנחות הבאות:

- (1) קיום ורציפות של הנגזרות המופיעות במשוואות (3.1-3.4)
לאורך קטעים של מסלול אופטימלי:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial X}, \frac{\partial L(\cdot)}{\partial X}, \nabla T, \frac{d}{dt}(\nabla T)$$

- (2) קיום אסטרטגיות אופטימליות במוכן אי שוויון האוכף (2.24),
להבדיל מהמועמדים לאסטרטגיות אופטימליות, וקיום מסלולים
אופטימליים שכנים.

- (3) קיום רציפות בבקורות לאורך קטעים של מסלול אופטימלי.

הנחות אלו יבדקו לקיום במהלך הפיתוח.

3.2.2 משחק הדרגה

בבעיה שלנו גרדיאנט הערך יוגדר:

$$\nabla T \equiv (T_x, T_y, T_\psi), T_{x_i} \equiv \partial T / \partial x_i \quad (3.5)$$

אינטגרנד התמורה הוא (ראה 2.23):

$$L(X, u, v) = 1 \quad (3.6)$$

נציב את משוואות התנועה (2.12) ואת אינטגרנד התמורה (3.6)
למשוואת ההמילטוניין (3.1):

$$H(X, \nabla T, u, v) = T_x \dot{x} + T_y \dot{y} + T_\psi \dot{\psi} + 1 = \quad (3.7)$$

$$= uA + vT_\psi + T_x \sin\psi + T_y \cos\psi - T_y + 1$$

כאשר הפונקציה A היא:

$$A \equiv x^T_y - y^T_x - T_\psi \quad \text{בקואורדינטות קרטזיות:} \quad (3.8)$$

$$A \equiv -T_\theta - T_\psi \quad \text{בקואורדינטות פולריות:}$$

מאחר שקיימת ספרביליות בין משתני הבקרה, ניתן לבצע את האופטימיזציה על u ו- v לחוד.

המועמדים לאסטרטגיות אופטימליות, מהמשוואה ME1 (3.2), ובעזרת מגבלות הבקרה (2.1), יהיו:

$$u^* = \text{sgn}A \equiv \sigma_1 \quad (3.9)$$

$$v^* = \text{sgn}(-T_\psi) \equiv \sigma_2$$

כאשר:

$\text{sgn}(\cdot)$ היא פונקציית הסימן, המקיימת:

$$\text{sgnx} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

A היא פונקציית המיתוג של P.

T_ψ היא פונקציית המיתוג של E.

הבקרות σ_1 ו- σ_2 המתקבלות הן בקרות קיצון.

בהמשך נראה, שקיים מצב שבו פונקציית המיתוג של E, T_ψ , מתאפסת, והבקרה σ_2 לכן אינה מוגדרת. במקרה זה נצטרך להפעיל תנאים הכרחיים מקומיים מיוחדים - ראה נספח א', ונקבל ש- $\sigma_2 = 0$.

נסכם את הערכים של הבקורות הצפויות במשחק זה (סה"כ 6 צירופים של צמדי בקרה σ_1, σ_2):

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.11)$$

$$\sigma_2 = \pm 1, 0$$

לאורך מסלול אופטימלי מתקימת ME2 (3.3). נציב לתוכה את האסטרטגיות המועמדות (3.9):

$$H^* = H(X, \nabla T, u^*, v^*) = |A| - |T_\psi| + \quad (3.12)$$

$$+T_x \sin \psi + T_y \cos \psi - T_y + 1 = 0$$

לאורך מסלול אופטימלי תתקיימנה גם המשוואות הצמודות (3.4). נפתח אותן בעזרת (3.12):

$$\dot{T}_x = - \frac{\partial H^*}{\partial x} = -\sigma_1 T_y$$

$$\dot{T}_y = - \frac{\partial H^*}{\partial y} = \sigma_1 T_x \quad (3.13)$$

$$\dot{T}_\psi = - \frac{\partial H^*}{\partial \psi} = -T_x \cos \psi + T_y \sin \psi$$

המשוואות הצמודות תשמשנה אותנו לחישוב פונקציות המיתוג A ו- T_ψ .

3.2.3 משחק הסוג

יהי v הנורמל למחסום B , בכיוון שאיפת P , כלומר בכיוון אזור התפיסה CZ .

ISAACS הראה בספרו [4] שקיימת אנלוגיה מלאה בפתרונות עבור ∇T במשחק הדרגה v - u במשחק הסוג.

מאחר שלתמורה, במובן הזמן לסיום, אין משמעות במשחק הסוג, לוקחים:

$$L(X, u, v) = 0 \quad (3.14)$$

ההמילטונין H יהיה:

$$H(X, v, u, \psi) = v \dot{x} + v \dot{y} + v \dot{\psi} = \quad (3.15)$$

$$= uA + v v_{\psi} + v_x \sin \psi + v_y \cos \psi - v_y$$

כאשר A מוגדר כמו ב-(3.8), בהחלפת רכיבי ∇T ברכיבי v . התנאי למשטח חצי חדיר (SPS), מתוך (3.2):

$$\min_{v \in V} \max_{u \in U} H(X, v, u, \psi) = 0 \quad (3.15a)$$

המועמדים לאסטרטגיות אופטימליות יהיו כמו ב-(3.9), בהחלפת רכיבי ∇T ברכיבי v .

המשוואה ME2 לאורך מסלול אופטימלי תהיה:

$$H^* = H(X, v, u^*, v^*) = |A| - |v_{\psi}| + \quad (3.16)$$

$$+ v_x \sin \psi + v_y \cos \psi - v_y = 0$$

המשוואות הצמודות לאורך מסלול אופטימלי תהינה כמו (3.13),
בהחלפת רכיבי ∇T ברכיבי v .

הערה: המונח "אופטימלי", בהקשר למשחק הסוג, מייצג תכונות על
המחסום.

3.3 המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי

נרכז את המשוואות הדיפרנציאליות לאורך קטעים במסלול אופטימלי. נעבור
לזמן נסוג בעזרת הקשר (2.4), ונציב את הבקורות האופטימליות מתוך (3.9).

משוואות התנועה הנסוגות (מתוך (2.12)):

$$\dot{x} = -\sin\psi + \sigma_1 y$$

$$\dot{y} = -\cos\psi + 1 - \sigma_1 x \quad (3.17)$$

$$\dot{\psi} = \sigma_1 - \sigma_2$$

המשוואות הצמודות הנסוגות (מתוך (3.13)):

$$\dot{T}_x = \sigma_1 T_y$$

$$\dot{T}_y = -\sigma_1 T_x \quad (3.18)$$

$$\dot{T}_\psi = T_x \cos\psi - T_y \sin\psi$$

תנאי ההתחלה ב- $\tau = 0$ עבור נקודת התחלה (בזמן נסוג) כלשהיא במרחב המשחק
(לאו דווקא על המטרה):

$$X(0) = X_0 \equiv (x_0, y_0, \psi_0) \quad (3.19)$$

$$\nabla T(0) = \nabla T_0 \equiv (T_{x0}, T_{y0}, T_{\psi 0})$$

תנאי התחלה לנגזרות הראשונות ניתן לקבל ע"י הצבת (3.19) לתוך (3.17) ו-(3.18).

הערה: תנאי ההתחלה כאן הם במובן הזמן הנסוג, ולמעשה הם תנאי סיום בזמן אמיתי.

ניתן לקבל צורה קומפקטית יותר של פתרונות המשוואות ע"י שימוש בפרמטרים עבור תנאי ההתחלה. נגדיר את הפרמטרים הבאים:

עבור וקטור המצב: (r_0, θ_0, ψ_0)

$$X_0 = (r_0 \sin \theta_0, r_0 \cos \theta_0, \psi_0) \quad (3.20)$$

עבור גרדיאנט הערך: (s_1, s_2, T_{ψ_0})

$$\nabla T_0 = (s_1 \sin s_2, s_1 \cos s_2, T_{\psi_0}) \quad (3.21)$$

(3.21) מקיימת את הקשר (B.12) בנספח ב', כנדרש.

מערכת המשוואות המתקבלת, היא מערכת של 6 משוואות דיפרנציאליות רגילות לא-לינאריות מסדר ראשון עם 6 תנאי התחלה, פתרון ע"י אינטגרציה לאחור עם תנאי התחלה ב- $t = 0$.

המשוואות טובות למשחק הדרגה עם ∇T , ולמשחק הסוג עם v במקום ∇T .

3.4 משוואות המסלול האופטימלי - רכוז הפתרונות

בסעיף זה מרוכזות כל משוואות המסלול, הכוללות את וקטור המצב, גרדיאנט הערך, הבקורות האופטימליות ופונקציות המיתוג לאורך קטעים רציפים של מסלול אופטימלי. הפתוח המפורט של הפתרון מובא בנספח ב'. תנאי ההתחלה מוצגים בצורה פרמטרית (ראה סעיף B.3 בנספח ב').

מובאים שני מקרים - בקרות קיצון ובקרת אפס ל-E. כל המשוואות נכונות גם עבור משחק הסוג, בהחלפת ∇T ב-v.

3.4.1 משוואות המסלול עבור בקרות קיצון

המשוואות בסעיף זה נכונות לבקרות הבאות:

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.22)$$

$$\sigma_2 = \pm 1$$

וקטור המצב X:

$$\begin{aligned} x &= r_0 \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 (1 - \cos \tau) + \\ &+ \sigma_2 [\cos(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \psi] \\ y &= r_0 \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sin \tau - \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$- \sigma_2 [\sin(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \sin \psi]$$

$$\psi = \psi_0 + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau$$

גרדיאנט הערך VT:

$$T_x = s_1 \sin(s_2 + \sigma_1 \tau)$$

$$T_y = s_1 \cos(s_2 + \sigma_1 \tau) \quad (3.24)$$

$$T_\psi = T_{\psi_0} - s_1 \sigma_2 [\cos(\psi_0 - s_2 - \sigma_2 \tau) - \cos(\psi_0 - s_2)]$$

הבקרות האופטימליות σ_1 ו- σ_2 :

$$\sigma_1 = \text{sgn}A \quad (3.25)$$

$$\sigma_2 = -\text{sgn}T_\psi$$

כאשר פונקציות המיתוג:

$$A = r_0 s_1 \sin(\theta_0 - s_2) - T_\psi + \quad (3.26)$$

$$+\sigma_1 s_1 [\cos(s_2 + \sigma_1 \tau) - \cos s_2]$$

ו- T_ψ מתוך (3.24).

3.4.2 משוואות המסלול עבור בקרת אפס ל-E

המשוואות בסעיף זה נכונות לבקרות הבאות:

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.27)$$

$$\sigma_2 = 0$$

וקטור המצב X:

$$x = r_0 \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \tau \sin \psi + \sigma_1 (1 - \cos \tau)$$

$$y = r_0 \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \tau \cos \psi + \sin \tau \quad (3.28)$$

$$\psi = \psi_0 + \sigma_1 \tau$$

גרדיאנט הערך ∇T :

$$T_x = s_1 \sin(s_2 + \sigma_1 \tau)$$

$$T_y = s_1 \cos(s_2 + \sigma_1 \tau) \quad (3.29)$$

$$T_\psi = 0$$

הבקורות האופטימליות σ_1 ו- σ_2 :

$$\sigma_1 = \operatorname{sgn} A \quad ((3.26) \text{ כמו ב-}) \quad (3.30)$$

$$\sigma_2 = 0$$

פרק 4 : משחק הסוג - תאור המחסום

מבוא 4.1

פתרונו של משחק הסוג מתמקד במציאת מחסום מורכב סגור ולא נוזל, המחלק את מרחב המשחק לאזור תפיסה ולאזור התחמקות. בפרק זה נבנה את המחסום ונתאר אותו.

בחירת תכונות המשחק רומזת על קיום מחסום סגור, מכיון שניתן למצוא מצבי תפיסה או התחמקות בטוחים. דוגמא להתחמקות בטוחה - אם E נמצא מאחורי P וכיוונו מנוגד ל של P , הרי אם יהיה קרוב למטרה, יצליח להתחמק. מצב שני, אם וקטורי המהירות של שני השחקנים באותו כיוון, אפשר לקבל תחושה שקיימת איסטרטגיה ל- P שתבטיח ש- E לא יוכל להתרחק ממנו.

המחסום אותו נבנה חייב לקיים את התנאי (3.15a) שהוצג בפרק 3 שהוא בעצם תנאי לכך שהמחסום יהיה חצי חדיר. מבין אוסף המשטחים החצי חדירים הקיימים במשחק, נחפש משטח סגור מורכב שתפרידו אינם נוזלים, המפריד בין אזור תפיסה לבין אזור התחמקות. לפיכך, יהיה עלינו להגדיר תנאי התחלה מתאימים. באופן אינטואיטיבי, נחפש תנאי התחלה על המטרה, בקו הגבול (BUPS) שבין אזור גמר לאזור אי-גמר שיוגדרו על הקינמטיקה. למרות שקיימים קוים כאלה מסתבר שרק נקודה אחת עליהם משמשת מקור יחיד לבנית המחסום כולו. נקודה זו היא תחילתם של שני קוים אוניברסליים (EUL) המנקזים אליהם מסלולים או פטימליים רבים, שעוטפותיהם יוצרות את משטח המחסום.

נפתח את משוואת ה-EUL והמסלולים האופטימליים, ונקבל שתי יריעות מחסום, הנפגשות כל אחת עם המטרה, ונפגשות ביניהן על קו דיספרסלי PDL. מתקבלים תמרונים אופיניים למשחק, הכוללים פניות לשני השחקנים ותנועה על קו ישר ל-E. נציג תאור של התמרונים במרחב המצב ובמרחב האמיתי.

נציג תחום של הפרמטר K שבו הושלם פתרון, וקיבלנו יריעות מחסום סגורות ובלתי נוזלות. חלקו האחר של התחום הפרמטרי לא טופל בעבודה זו.

4.2 החלק השימושי

כשלב ראשון לאיתור מיקום המחסום ואזורי התפיסה וההתחמקות (EZ ו-CZ בהתאמה), נזהה על המטרה אזורים שבהם יש או אין גמר (התחמקות) וגבולותיהם.

נכנה את האזורים בשמות הבאים (על פי ISAACS):

UP - Useable Part	החלק השימושי (גמר)
NUP - Non-Useable Part	החלק הלא-שימושי (אי-גמר)
BUP - Boundary of Useable Part	גבול החלק השימושי (השקה)

נגדיר את ה-BUP על המטרה, בעזרת (2.13):

$$r_o^\circ = -\cos(\psi_o - \theta_o) + \cos\theta_o = 0 \quad (4.1)$$

$$\psi_o = 2\theta_o \quad r_o = K \quad (4.2)$$

$$\psi_o = 0$$

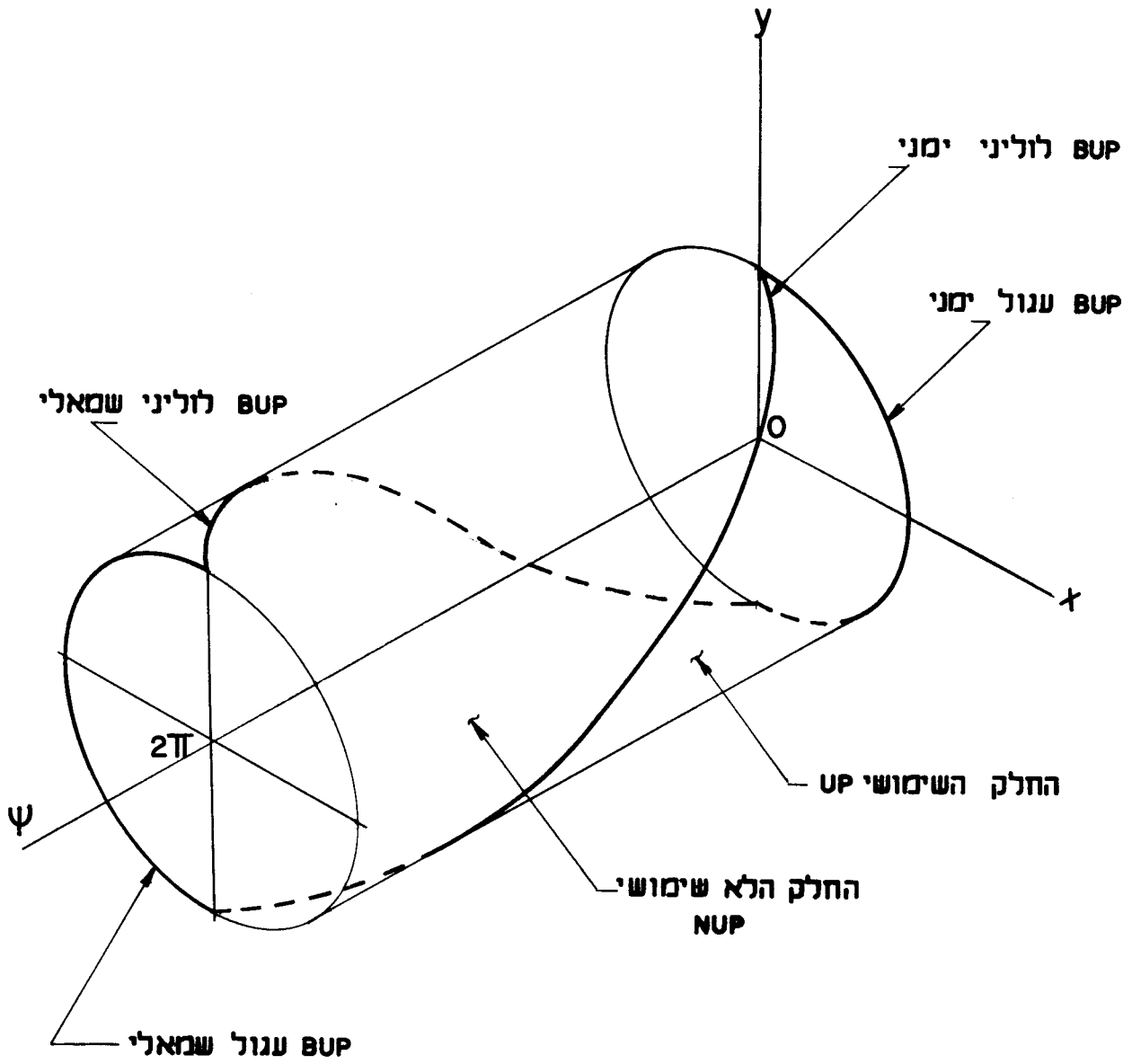
(4.2) הן משוואות ה-BUPS. הראשונה היא משוואת לולין והשנייה משוואת עגול. האינדקס (o) מסמן תנאי התחלה נסוגים ($\tau = 0$).

החלק השימושי יהיה:

$$r_o^\circ = -\cos(\psi_o - \theta_o) + \cos\theta_o < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_o < 2\theta_o \quad , \quad \psi_o > 0 \\ \psi_o > 2\theta_o \quad , \quad \psi_o < 0 \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

החלק הלא-שימושי יהיה המשלים של (4.3). ראה תיאור מלא בצירור 4.1.



ציור 4.1 : החלק השימושי וגבולותיו.

Fig. 4.1 : The useable part and its boundaries.

בתאור וקטורי באמצעות ציור 2.3, תנאי (4.1) מבטיח שעל ה-BUP כל וקטור של הדינמיקה ישיק למרחב המשחק. מאחר שהמישור ABCD נמצב ל- x , הדרישה לתקלים רק אם X יהיה על המישור. עבור UP, תנאי (4.3) יתקיים כאשר X יהיה בין המישור ABCD לציר ψ ואילו ה-NUP יתקיים כאשר X יהיה מעברו השני של המישור.

4.3 תנאי התחלה למחסום

ברור שהחלק השימושי (UP) יהיה שייך לאזור ההתחמקות. החלק הלא-שימושי (NUP) לעומתו יהיה שייך רובו או חלקו לאזור התפיסה. המחסום יפריד בין אזור ההתחמקות ואזור התפיסה.

בדרך כלל, מחסומים טבעיים על פי ISAACS (Natural Barriers) מתחברים (ב- $\tau = 0$) אל המטרה בהשקה לאורך ה-BUPS, כך שהנורמל למטרה בכיוון פנים מרחב המשחק והנורמל למחסום בכיוון אזור התפיסה יתלכדו. חיבור כזה מבטיח "אטימות" המחסום.

הנורמל למטרה ב-BUPS יהיה:

$$v_0 = (-1, 0, 0) \quad \text{פולרית:} \quad (4.4)$$

$$v_0 = (-\sin\theta_0, -\cos\theta_0, 0) \quad \text{קרטזית:}$$

v_0 יהיה תנאי התחלה למחסום על ה-BUP, בזמן $\tau = 0$.

נמצא את ערכי פונקציות המיתוג על המטרה ב-BUPS, בעזרת (4.4), (3.26) ו-(3.21): $(s_1 = -1, s_2 = \theta_0)$

$$A_0 = 0 \quad (4.5)$$

$$v_{\psi 0} = 0$$

נמצא את ערכי הבקרות האופטימליות בקרבת המטרה (לא עליה), ע"י התבוננות בערכי הנגזרות הבאות על ה-BUP, בעזרת (3.18), (B.24) ו-(4.4):

$$\overset{\circ}{A}_0 = \sin\theta_0 \quad (4.6)$$

$$\overset{\circ}{v}_{\psi_0} = \sin(\psi_0 - \theta_0)$$

הבקרות האופטימליות בקרבת המטרה תהיינה בעזרת (4.5) ו-(4.6):

$$u^* = \sigma_1 = \text{sgn}A = \text{sgn}\overset{\circ}{A}_0 = \text{sgn} \sin\theta_0 \quad (4.7)$$

$$v^* = \sigma_2 = -\text{sgn}v_{\psi} = -\text{sgn}\overset{\circ}{v}_{\psi_0} = -\text{sgn} \sin(\psi_0 - \theta_0)$$

בניית מסלולים אופטימליים כאשר $\theta_0 \neq 0$

$$\sigma_1^{\pm} = -\sigma_2^{\pm} = \pm 1 \quad \text{בקרבת BUP לוליני:} \quad (4.8)$$

$$\sigma_1^{\pm} = \sigma_2^{\pm} = \pm 1 \quad \text{בקרבת BUP עגול:}$$

כאשר (+) מסמל ימין ו-(-) מסמל שמאל, לפי ציור 4.1.

נבחר לדוגמא את מקרי ימין:

נחשב את $r^{\circ\circ}$ ע"י גזירת (2.13) בזמן נסוג, ונציב את משוואת BUP לוליני (4.2) ואת בקרותיו (4.8), ונקבל את $r_0^{\circ\circ}$ על ה-BUP הלוליני הימני:

$$r_0^{\circ\circ} = 4\sin^2\theta_0/K > 0 \quad (4.9)$$

כלומר, המסלול בזמן נסוג יוצא אל מחוץ למרחב המשחק, ולכן אינו יכול ליצור מחסום.

בקרבת BUP עגול ימני, בעזרת משוואות המסלולים (3.23) והבקרות (4.8),
נקבל משוואת המסלול:

$$r(\tau) = K \quad (4.10)$$

$$\psi(\tau) = 0$$

כלומר, המסלול מתלכד עם ה-BUP העגול, ולכן לא נובעים מן ה-BUP מסלולים
בזמן נסוג, ולא נוצר מחסום.

בניית מסלולים אופטימליים כאשר $\theta_0 = 0$

בנקודה זו, בשני סוגי ה-BUPS, קיים $\psi_0 = 0$. שתי פונקציות המיתוג
ב-(4.7) בקרבת המטרה מתאפסות, ולכן נבדוק נגזרות שניות, בעזרת (3.17),
(3.18), (B.24) ו-(4.4):

$$A_0^{\circ\circ} = -v_{x0}^{\circ} = -\sigma_1 v_{y0}^{\circ} = \sigma_1 \cos \theta_0^{\circ} = \sigma_1 \quad (4.11)$$

$$v_{\psi 0}^{\circ\circ} = v_{x0}^{\circ} \cos \psi_0^{\circ} - v_{x0}^{\circ} \psi_0^{\circ} \sin \psi_0^{\circ} - v_{y0}^{\circ} \sin \psi_0^{\circ} - v_{y0}^{\circ} \psi_0^{\circ} \cos \psi_0^{\circ} =$$

$$= -\sigma_2 \cos(\psi_0^{\circ} - \theta_0^{\circ}) = -\sigma_2$$

הבקרות האופטימליות בקרבת המטרה תהיינה:

$$u^* = \sigma_1 = \operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} A_0^{\circ\circ} = \operatorname{sgn} \sigma_1 \quad (4.12)$$

$$v^* = \sigma_2 = -\operatorname{sgn} v_{\psi} = -\operatorname{sgn} v_{\psi}^{\circ\circ} = \operatorname{sgn} \sigma_2$$

לפי נספח א' משוואות (4.5) עם (4.12) מאפשרות לשני השחקנים גם בקרות קיצון וגם בקרות אפס, כלומר:

$$\sigma_i = \pm 1, 0 \quad (4.13)$$

נבדוק את הצירופים האפשריים (סה"כ 9) בעזרת משוואות התנועה (3.17), ובעזרת הנגזרות השונות של r , שערכן בנקודה $\psi_0 = \theta_0 = 0$:

$$r_0^{\circ} = r_0^{\circ\circ} = 0$$

$$r_0^{\circ\circ\circ} = \sigma_2^2 - \sigma_1^2$$

$$r_0^{\circ\circ\circ\circ} = 3(\sigma_2 - \sigma_1)^2 / K$$

$$(א) \quad \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pm 1 \quad (\text{שני מקרים}):$$

$$r_0^{\circ\circ\circ} = 1 > 0$$

כלומר, המסלול בזמן נסוג יוצא אל מחוץ למרחב המשחק, ולכן אינו יכול ליצור מחסום.

$$(ב) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad (\text{מקרה אחד}):$$

אין תנועה יחסית בין השחקנים ולא נוצר מחסום. במרחב היחסי זו נקודה עומדת.

$$(ג) \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad (\text{שני מקרים}):$$

מתקבלות משוואות כמו ב-(4.10), וזו התלכדות עם BUP מעגלי, שאינה יוצרת מחסום (כמו במקרה $\theta_0 \neq 0$).

$$(ד) \quad \sigma_1 = -\sigma_2 \quad (\text{שני מקרים}):$$

$$r_0 = 0$$

$$r_0 = 12/K > 0$$

כלומר, המסלול בזמן נסוג יוצא אל מחוץ למרחב המשחק, ולכן אינו יכול ליצור מחסום.

$$(ה) \quad \sigma_1 = \pm 1, \sigma_2 = 0 \quad (\text{שני מקרים}):$$

$$r_0 = -1 < 0$$

כלומר, המסלול בזמן נסוג נכנס אל תוך מרחב המשחק, ולכן הוא מועמד ליצירת מחסום.

מאחר שמקרה זה מקיים את התנאי (A.10) שהוצג בנספח א', הרי שבחירת $v^* = \sigma_2 = 0$ עבור E מצביעה על קיום מסלול סינגולרי מהטיפוס שנקרא ע"י ISAACS קו אוניברסלי ל-E, EUL (Universal Line), המתחיל בנקודה $\psi_0 = \theta_0 = 0$, ונמשך לשני הכיוונים, בהתאם לסימן של $u^* = \sigma_1$.

לסיכום, הבקורות ההתחלתיות של המחסום הן:

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (4.14)$$

$$\sigma_2 = 0$$

נקודת ההתחלה של EUL היא (בעזרת (3.21) ו-(4.4)):

$$\psi_0 = \theta_0 = 0 \quad s_2 = 0 \quad (4.15)$$

$$r_0 = K \quad s_1 = -1$$

ניתן לראות ש-(4.5), (4.14) ו-(4.15) מקיימות את ME2 (3.16), כנדרש.

4.4 מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות

לפני שניכנס לפיתוח המתימטי של משוואות המחסום, נציג את אופי הפתרון בצורה איכותית, ונתארו גם באמצעות תאור התמרונים במרחב האמיתי, בציר 4.2.

נראה שהמחסום הסגור יהיה מורכב מיריעות של מסלולים (Tributaries) הנובעים מ-EUL. המשמעות של פתרון זה במונחים של המרדף הוא, שכל המרדפים המבוצעים על המחסום יסתיימו בתנועה על EUL, שבה E מסיים בתנועה בקו ישר ו-P מאחריו במרחק K. תוצאה זו בהתאמה לבקרות הסופיות שהוצגו ב-(4.14).

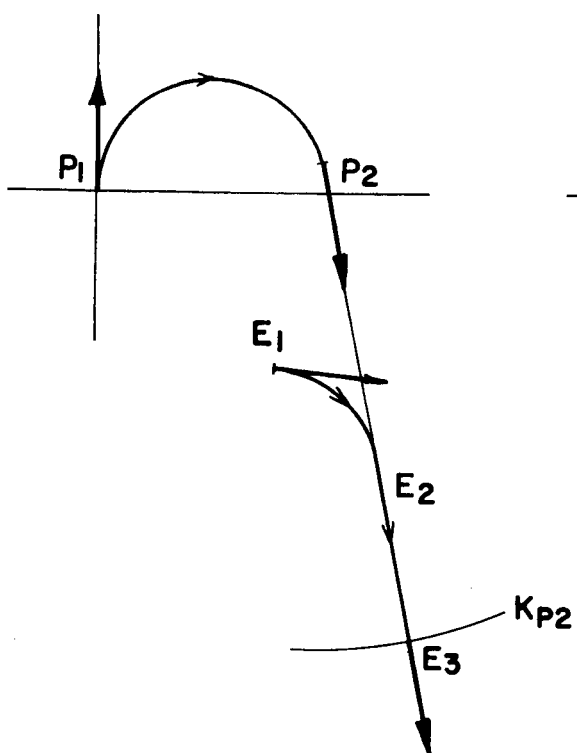
מטעמי סימטריה סביב ציר y , ניבנות יריעות המחסום מימין ומשמאל באמצעות EUL^+ ו- EUL^- בהתאמה, וקו המפגש ביניהן הוא קו דיספרסלי ל-P, PDL, לפי ISAACS (Dispersal Line).

דוגמאות למרדפים על המחסום:

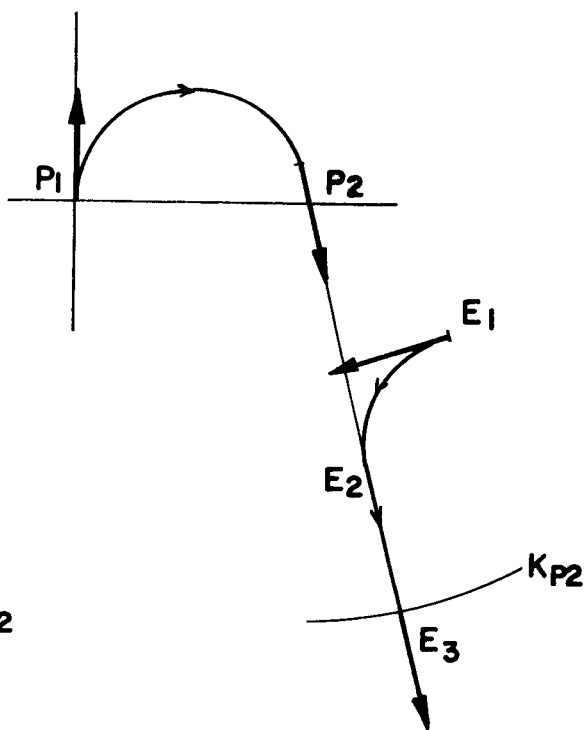
במקרים א' ו-ב' שבציר 4.2 מתוארים תמרונים פשוטים אופייניים. P פונה ימינה מנקודה P_1 עד לנקודה P_2 הנמצאת על המשיק לשני רדיוסי הפנייה. במשך אותו הזמן, E פונה שמאלה (מקרה א') או ימינה (מקרה ב') מנקודה E_1 עד לנקודה E_2 הנמצאת על המשיק לשני רדיוסי הפנייה, ואח"כ נע על המשיק עד לנקודה E_3 . במצב זה נוצרת רדיפת זנב, כאשר שני השחקנים נעים על קו ישר, ומרחקם זה מזה הוא רדיוס התצפית K.

יתכן מצב ש-E מתחיל בנקודה E_2 , ואז התנועה בכל מהלך המשחק נעה על המשיק, כלומר על EUL. אם נציג את המקרים האלה סימטרית לציר y מצידו השני, ברור שכל התמרונים יתהפכו. במרחב שבין מקרי הקיצון קיים מצב ביניים שבו שני סוגי התמרונים אופציונליים. מצב כזה מתואר במקרים ג' ו-ד'.

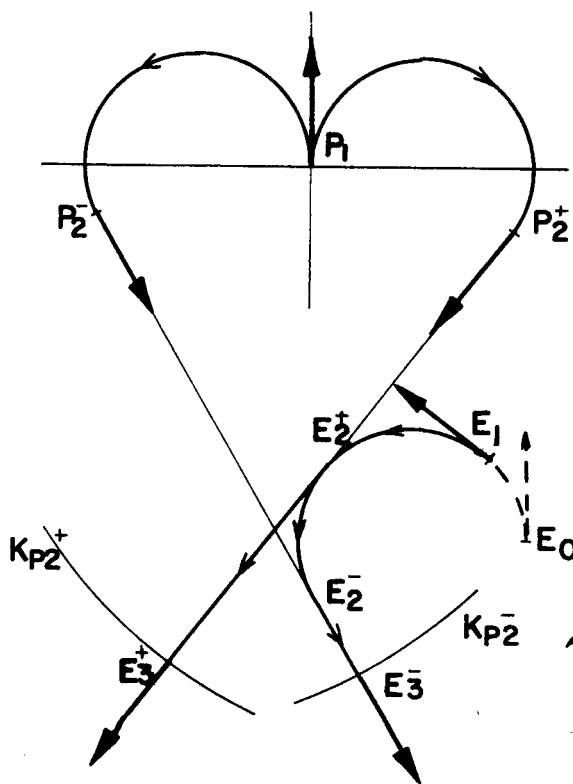
במקרה ג' ל-P יש אופציה לפנות ימינה או שמאלה. E יפנה באותו כיוון כמו P. מרגע בחירת הכיוונים, השחקנים יתמידו בתנועתם, בתמרונים משולבים כמו במקרים א' ו-ב'.



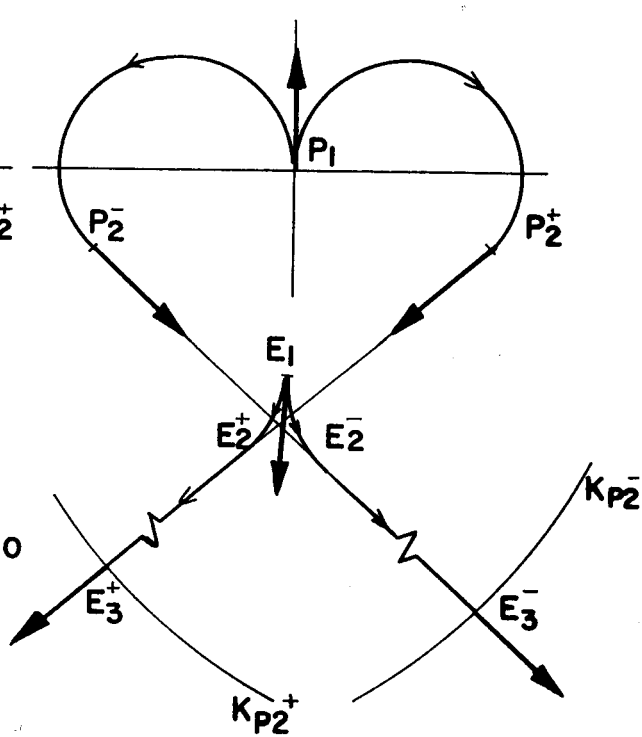
מקרה ב : $U=1; V=1,0$



מקרה א : $U=1; V=-1,0$



מקרה ד : $U=\pm 1; V=-1,0$



מקרה ג : $U=V=\pm 1,0$

ציור 4.2 : מגמות כלליות בבחירת אסטרטגיות במשחק הסוג במרחב האמיתי.

Fig. 4.2 : General criteria for strategies in the game of kind in the realistic space.

במקרה ב' ל-P שוב יש שתי אופציות. E לעומת זאת פונה שמאלה בכל מקרה, אך התיישרותו תהיה בנקודה E_2^+ או E_2^- , בהתאם לבחירתו של P. גם במקרים אלה ניתן להציג מקרה סימטרי סביב y, שבו E הופך מגמותיו.

4.5 משוואות הקו האוניברסלי EUL

נשתמש במשוואות הכלליות של EUL (3.27-3.30) עם תנאי התחלה (4.4), (4.14) ו-(4.15), ונרשום את משוואות הקו האוניברסלי:

וקטור המצב X:

$$x = \sigma_1 [(K-\tau)\sin\tau + 1 - \cos\tau]$$

$$y = (K-\tau)\cos\tau + \sin\tau \quad (4.16)$$

$$\psi = \sigma_1 \tau$$

הנורמל v:

$$v_x = -\sigma_1 \sin\tau$$

$$v_y = -\cos\tau \quad (4.17)$$

$$v_\psi = 0$$

הבקות האופטימליות:

$$\sigma_1 = \text{sgn}A = \text{sgn}[\sigma_1 (1 - \cos\tau)]$$

(4.18)

$$\sigma_2 = 0$$

המשוואות האלו הן בפרמטר τ . ניתן לחלצו

$$\tau = \sigma_1 \psi$$

ולהציבו ביתר המשוואות כדי לקבל משוואות ב- ψ .

קיימים שני קוים אוניברסליים במשחק: EUL^+ ($\sigma_1 = 1$) - ימני.
 EUL^- ($\sigma_1 = -1$) - שמאלי.

השפוע של EUL מגלה תכונה מעניינת. נגזור את (4.16):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \sigma_1 \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \psi \quad (4.19)$$

ב- $\psi = 0$ או $\psi = \pi$ נקבל שפוע אפס. ב- $\psi = \pi/2$ נקבל שפוע ניצב.

תכונה מעניינת נוספת: בחתך $\psi = \pi$ כל מסלולי EUL עוברים דרך הנקודות:

$$x = 2\sigma_1$$

$$y = \pi - K$$

בציורים 4.5, 4.7, 4.8 ו-4.9 מסומנות נקודות על EUL^\pm באמצעות עגולים קטנים. אם נחבר בין הנקודות, נקבל היטל של הקוים האוניברסליים על המשור xy .

4.6 משוואות המסלולים האופטימליים והקו הדיספרסלי PDL

4.6.1 מסלולי המחסום

המסלולים האופטימליים הרגילים במשחק הסוג נובעים בזמן נסוג מהקוים האוניברסלים. משוואותיהם הכלליות הן (3.22-3.26), אך נשתמש כאן בניסוח הלא פרמטרי שבנספח ב' - משוואות (B.2), (B.9) ו-(B.10). המשתנה τ במשוואות אלו יתאפס בנקודת ההתחלה על EUL. תנאי ההתחלה ילקחו ממשוואות EUL (4.16), עבור זמן τ_1 , כלומר:

$$x_0 = \sigma_1 [(K - \tau_1) \sin \tau_1 + 1 - \cos \tau_1]$$

$$y_0 = (K - \tau_1) \cos \tau_1 + \sin \tau_1 \quad (4.20)$$

$$\psi_0 = \sigma_1 \tau_1$$

נציב למשוואות המסלולים ונקבל:

$$x = \sigma_1 (K - \tau_1) \sin(\tau + \tau_1) - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\tau + \tau_1)$$

$$- \sigma_2 \cos \psi + \sigma_1$$

$$y = (K - \tau_1) \cos(\tau + \tau_1) + (1 - \sigma_1 \sigma_2) \sin(\tau + \tau_1) + \quad (4.21)$$

$$+ \sigma_2 \sin \psi$$

$$\psi = \sigma_1 \tau_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau$$

הערה: σ_1 במשוואות המסלולים ובמשוואות תנאי ההתחלה זהים. τ הוא הזמן עד למפגש המסלול עם EUL.

נבטל את הגורם τ_1 מהמשוואות ע"י חילוצו ממשוואת ψ :

$$\tau_1 = \sigma_1 \psi - (1 - \sigma_1 \sigma_2) \tau \quad (4.22)$$

נקבל:

$$x = x(\psi, \tau) = [K - \sigma_1 \psi + (1 - \sigma_1 \sigma_2) \tau] \sin(\psi + \sigma_2 \tau) - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\psi + \sigma_2 \tau) - \sigma_2 \cos \psi + \sigma_1 \quad (4.23)$$

$$y = y(\psi, \tau) = [K - \sigma_1 \psi + (1 - \sigma_1 \sigma_2) \tau] \cos(\psi + \sigma_2 \tau) + (\sigma_1 - \sigma_2) \sin(\psi + \sigma_2 \tau) + \sigma_2 \sin \psi$$

4.6.2 יריעות המחסום וה-PDL

נסמן ב-(+) את מסלולי ימין וב-(-) את מסלולי שמאל:

$$\begin{aligned} x^+ &= x(\psi^+, \tau^+; \sigma_2^+) \\ y^+ &= y(\psi^+, \tau^+; \sigma_2^+) \end{aligned} \quad \sigma_1 = 1 \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} x^- &= x(\psi^-, \tau^-; \sigma_2^-) \\ y^- &= y(\psi^-, \tau^-; \sigma_2^-) \end{aligned} \quad \sigma_1 = -1 \quad (4.25)$$

משוואות אלו מתארות את יריעות המחסום מימין ומשמאל כפונקציה של ψ^\pm ו- τ^\pm . נוכל לתאר את המחסום במרחב S התלת-ממדי ע"י הצגת חתכי ψ קבוע, באמצעות הפרמטרים τ^\pm בלבד, כאשר נבחר את ערכי σ_2^\pm בהתאם למקרה.

הערה: יש לשים לב, ש- ψ^+ שייך למסלולי ימין ו- ψ^- שייך למסלולי שמאל, ולכן, בפתרונות הנומריים, תחומי ערכיהם יהיו:

$$0 \leq \psi^+ \leq 2\pi$$

$$-2\pi \leq \psi^- \leq 0$$

יריעות המחסום משמאל ומימין נחתכות על קו דיספרסלי ל-P (PDL).
נשווה את (4.24) ל-(4.25):

$$x(\psi^+, \tau^+; \sigma_2^+) = x(\psi^-, \tau^-; \sigma_2^-) \quad (4.26)$$

$$y(\psi^+, \tau^+; \sigma_2^+) = y(\psi^-, \tau^-; \sigma_2^-)$$

נוסיף משוואה המקשרת בין ψ^- ל- ψ^+ באותו חתך ψ :

$$\psi^- = \psi^+ - 2\pi \quad (4.27)$$

מ-(4.26) ביחד עם (4.27) נחלץ את τ^+ ו- τ^- :

$$\tau^+ = \tau(\psi; \sigma_2^+, \sigma_2^-) \quad (4.28)$$

$$\tau^- = \tau(\psi; \sigma_2^+, \sigma_2^-)$$

נציב את (4.28) ל-(4.24) או ל-(4.25), עם ערכי σ_2^\pm המתאימים, ונקבל את משוואת הקו הדיספרסלי PDL:

$$x = x[\psi, \tau(\psi)] = x(\psi) \quad (4.29)$$

$$y = y[\psi, \tau(\psi)] = y(\psi)$$

זו משוואת קו בפרמטר ψ .

בקטעי ה-PDL, המיוצגים ע"י מקרה ג' בציור 4.2, פותחה משוואה סגורה ל-PDL, אך מפאת מורכבותה האלגברית לא השתמשנו בה ולכן אינה מובאת כאן. בוצע פתרון נומרי.

בקטעים המיוצגים ע"י מקרה ד', משוואות (4.26) הן טרנסצדנטליות ולכן הכרחי פתרון נומרי.

בפתרונות הנומריים, ערכי σ_2^\pm נבחרים כך ש-(4.22) תקיים תמיד $0 \leq \tau_1^\pm$.

חשוב לציין שהזמן הכולל τ_t עד להשקה למטרה, מנקודת PDL כלשהיא, שונה לכל כיוון, מאחר שאין במשחק הסוג, על המחסום, משמעות לתמורה. כלומר:

$$\tau_t^+ = \tau_1^+ + \tau^+ \neq \tau_t^- = \tau_1^- + \tau^- \quad (4.30)$$

4.7 תאור איכותי של המחסום המלא

בניית המחסום עם משוואותיו (4.23), משוואות EUL (4.16) ומשוואות PDL (4.26), יוצרת מחסום סגור. ציורים 4.3 ו-4.4 מתארים באופן איכותי את המחסום המלא במרחב המצב (ללא אזור התפיסה), עבור שני סוגי גבולות ψ של המחסום. הציורים נכונים לערכי $K \geq \pi + 2$, מגבלה שתוסבר בהמשך.

נתאר את המחסום:

מהנקודה D נמתחים שני קווי EUL - DB' ו-DB. הקו הימני, EUL^+ , מיצג פנייה ימינה של P, והקו EUL^- מיצג פנייה שמאלה של P. אל כל קו, משני צידיו, מצטרפים מסלולים אופטימליים, המיצגים פנייה ימינה או שמאלה של E. מעטפות המסלולים יוצרות משטחים חצי חדירים.

קיימים מסלולים מטיפוס $u = v$ שהם בעלי ψ קבוע וצורתם מעגלית (יזכר בהמשך), ומסלולים מטיפוס $u = -v$ שהם בעלי ψ משתנה וצורה גאומטרית מורכבת. חלק ממסלולי $u = -v$ פוגש את המטרה מעט מעל ה-BUPS הלוליניים, לאורך הקוים DA' ו-DA''. שני המסלולים הקיצוניים של המשטחים $u = v$ מתלכדים

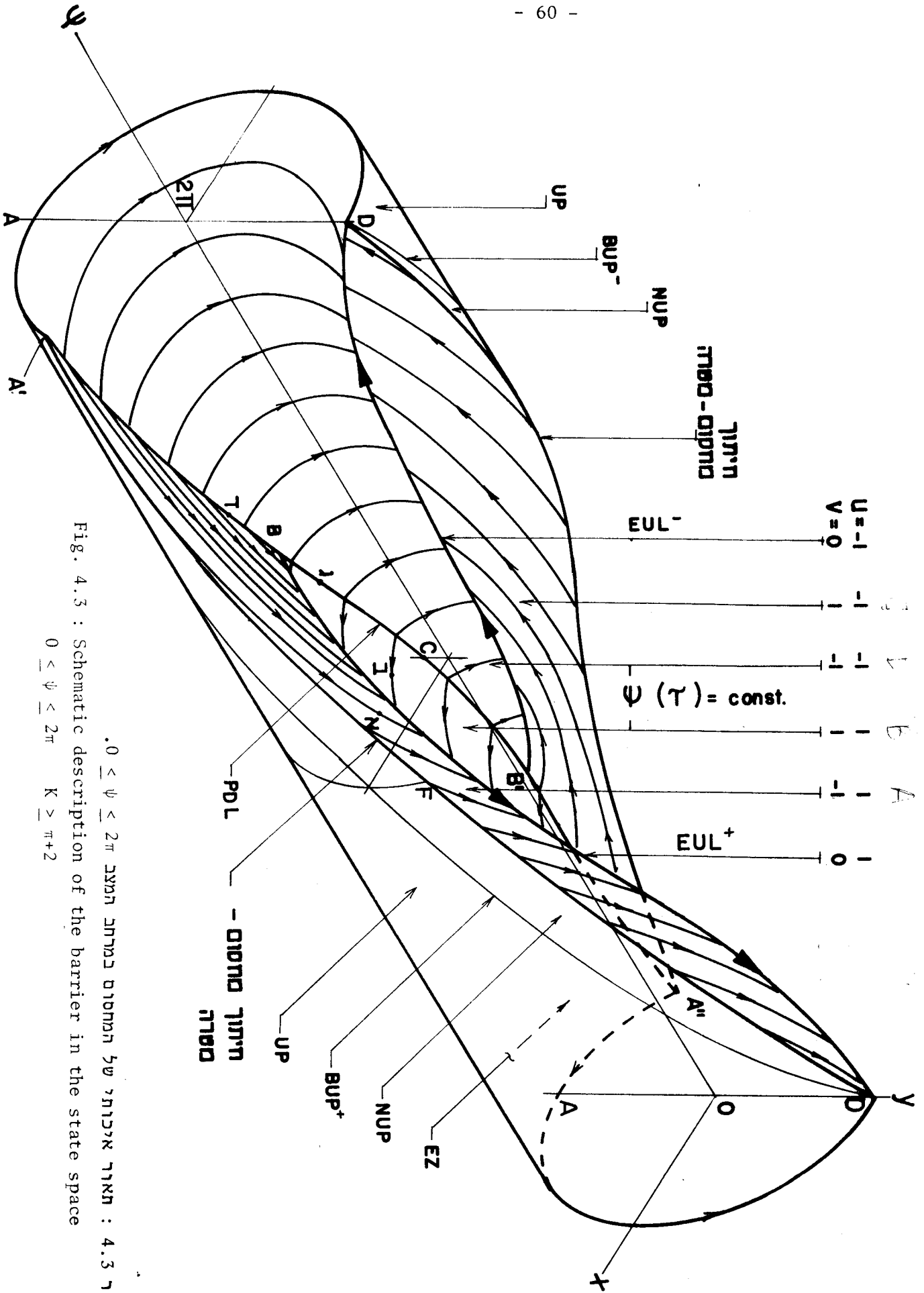
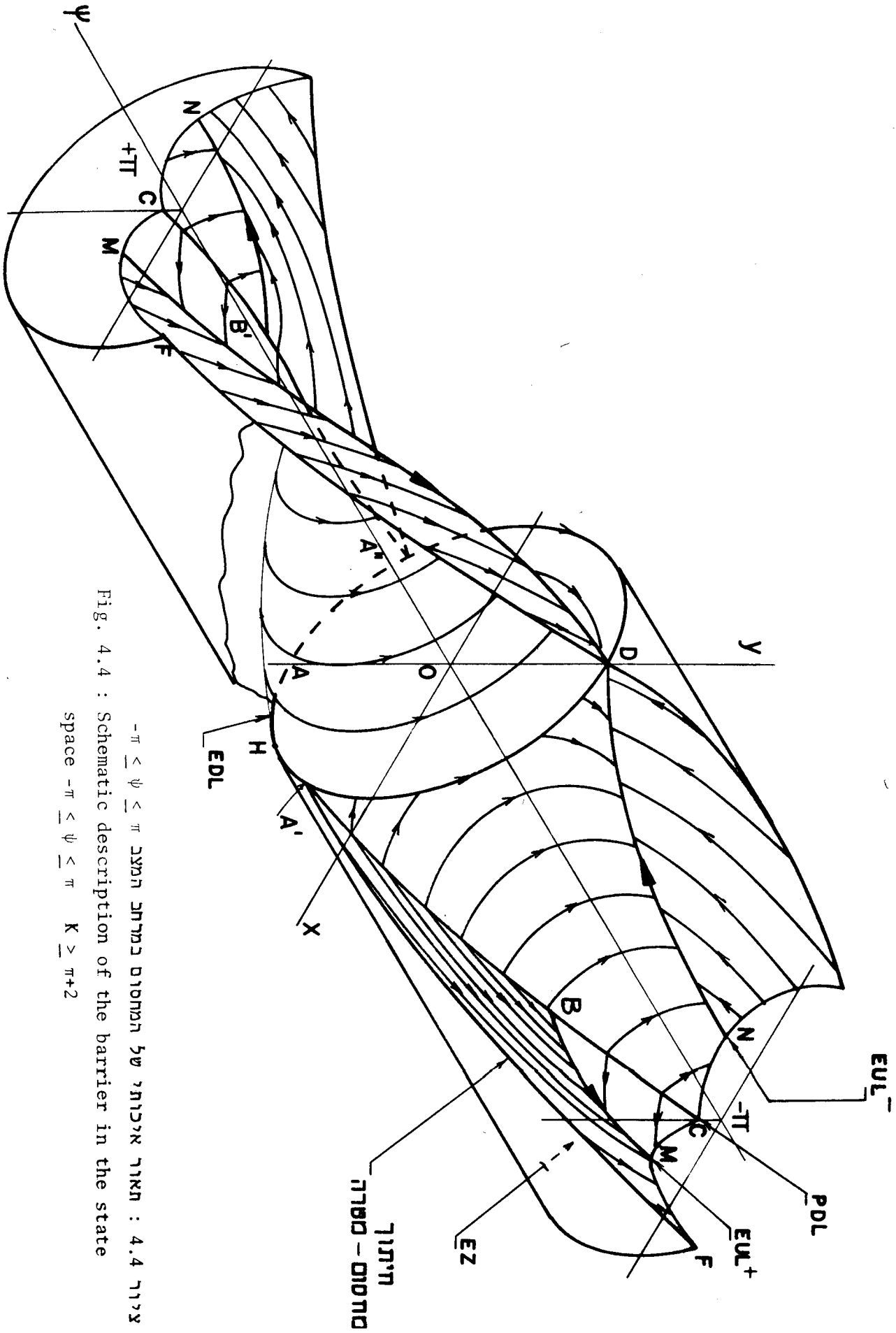


Fig. 4.3 : Schematic description of the barrier in the state space

צירוף 4.3 : תאור איכותי של המחסום במרחב המצב המצב $0 \leq \psi \leq 2\pi$



ציור 4.4 : תאור איכותי של המחסום כמרחב המצא $-\pi \leq \psi \leq \pi$
 Schematic description of the barrier in the state space $-\pi \leq \psi \leq \pi$ $K \geq \pi+2$

עם ה-BUPS המעגליים, לאורך הקוים DAA' ו-DAA''. כאן יש תופעה מעניינת שתוסבר בהמשך - ישנה חפיפה בין שני מסלולי הקיצון לאורך הקטע A'AA' (ראה במיוחד על ציור 4.4), כאשר כיווני התנועה מנוגדים (מסומנת נקודה אופינית H). קטע זה הוא דיספרסלי ל-E, EDL.

מעטפות המסלולים, בבנייה לאחור מימין (מ-EUL⁺) ומשמאל (מ-EUL⁻) נפגשות זו עם זו על ה-PDL. ל-PDL עצמו שני קטעים אופיניים: מפגש מסלולי ψ קבוע משני הכיוונים (הקטע BB'), ומפגש מסלולי ψ קבוע עם מסלולי ψ משתנה (הקטעים A'B ו-A'B'). יש לציין שה-PDL אינו חותך את המטרה בנקודה A, כפי שניתן היה אולי לצפות מטעמי סימטריה. תופעה זו היא שגורמת לחפיפה שנזכרה לעיל.

הנקודות B ו-B' מענינות כשלעצמן. כאן, אופציות התנועה משני צידי ה-PDL הן תמרון משולב ל-E מצד אחד או תנועה ישירה על EUL מצד שני.

בציור 4.3 מסומנות נקודות א'-ד', המיצגות את המקרים א'-ד', שמתוארים בציור 4.2 במרחב האמיתי.

4.8 תאור חתכי המחסום בערכי K שונים

ציורים 4.5 עד 4.9 מתארים חתכים שונים של המחסום עבור ערכי K אחדים. קוים המסומנים בחיצים הם מסלולים במבט אמיתי ($u = v$). קוים ללא חץ מסמנים חתך דרך מסלולים ($u = -v$). קו מרוסק מסמן היטל PDL (חוץ מאשר בציור 4.6). עגולים קטנים מסמנים חתך דרך EUL. אזור התפיסה CZ מסומן בציור 4.5 מסומנות גם הבקורות האופיניות לכל אזור. כל הציורים מתארים את התחום $0 \leq \psi \leq \pi$, כאשר התחום המשלים מתקבל מסימטריה סביב הציר ψ או π , לפי המקרה. ציורים 4.5, 4.7, 4.8 ו-4.9 מתארים חתכי ψ של המחסום, עבור K שווה ל-6, $\pi+2$, 12 ו-100 בהתאמה. ציור 4.6 מתאר חתכי θ של המחסום עבור $K = 6$.

בכל המקרים ניכרת חלקות של המחסום, למעט על ה-PDL. ככל ש-K גדל, אזור ההתחמקות קטן ואזור התפיסה גדל. בערכי $K \leq 100$ אזור ההתחמקות מצטמק לכדי אחוז לא משמעותי ממרחב המשחק.

המקרה $K = 6$ (ציורים 4.5 ו-4.6):

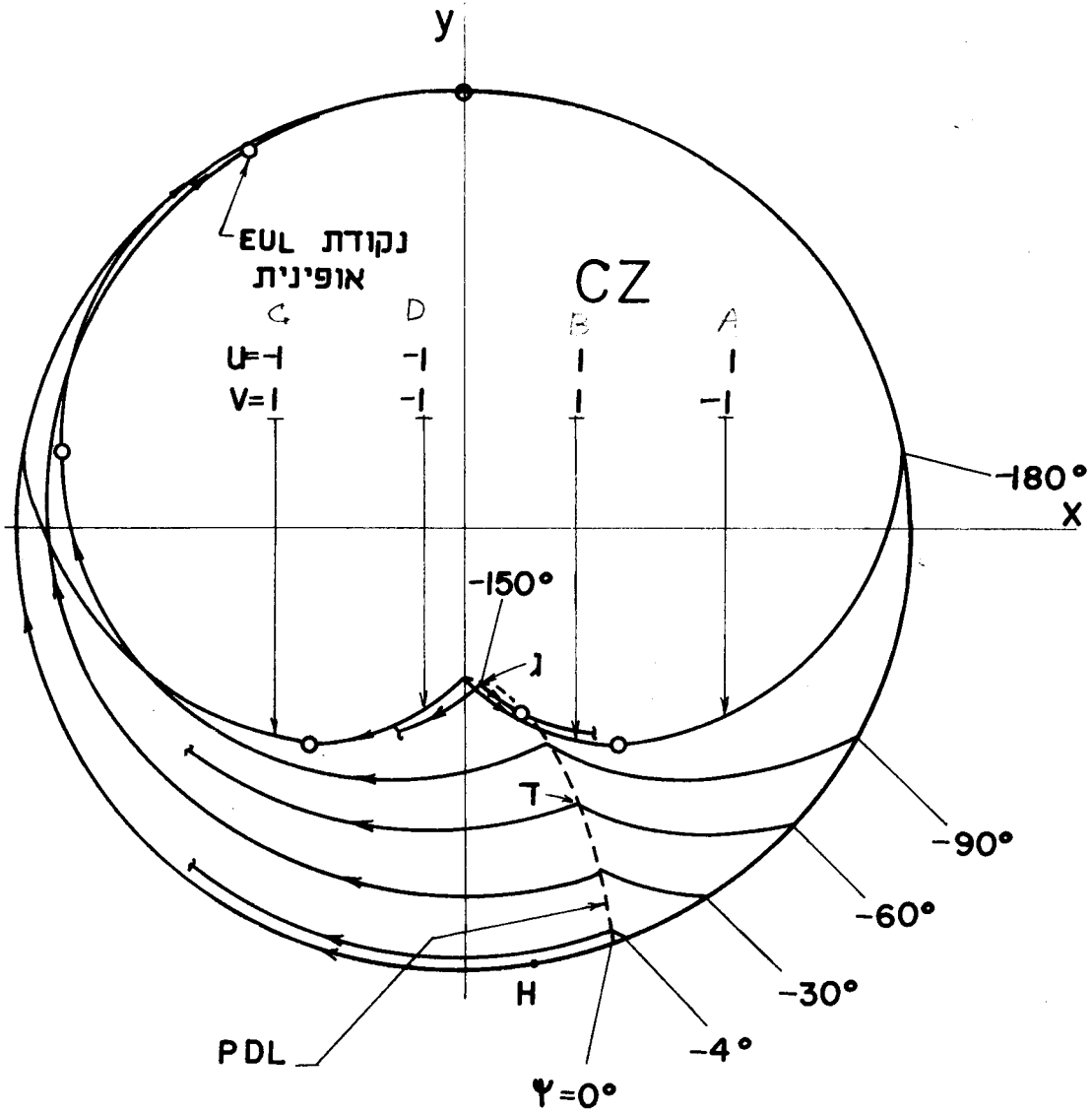
זהו מקרה טיפוס EUL^+ קיים עד -138.5° . ψ_B . ה-PDL מתחיל בנקודה $(\theta, \psi) = (\pi, -\pi)$ ומסתיים בנקודה $(161.5^\circ, 0)$. בכיוון הרדיאלי, המחסום מתחבר למטרה מעל ה-BUPS הלולינניים. בכיוון האורכי, המסלול האחרון ($\psi = 0$) מתלכד עם ה-BUP העגול השמאלי. ההתחברות ל-BUP זה אינה בהשקה למטרה, כפי שניתן לראות בציור 4.6, בנקודה $(x, \psi) = (6, 0)$, בחתכי θ שונים. נקודות ג' ו-ד' המסומנות בציור 4.5 מתיחסות למקרים ג' ו-ד' בציור 4.2.

המקרה $K = \pi + 2$ (ציור 4.7):

המיחד מקרה זה הוא השקת מסלולי חתך $\psi = -\pi$ מימין ומשמאל, בנקודה $(x, y) = (0, 0)$. הקטנה נוספת של K תביא לפתיחת המחסום בנקודה זו ובנקודות סמוכות. במקרה כזה, הפתרון של פרק זה "נשבר", מאחר שנוצרת פירצה במחסום, ההופכת אותו למשטח חצי חדיר לא סגור. מאחר שאנו מניחים שבמשחק זה קיים תמיד אזור תפיסה, ומכאן שקיים תמיד מחסום סגור, הרי שנצטרך לבנות יריעות מחסום נוספות ו/או חליפיות, שישלימו או יחליפו את אלו שפיתחנו. בניית מחסום כזה היא מחוץ לתכולת עבודה זו.

הערות:

- (1) התוצאות בציורים הבאים חושבו באמצעות תוכנית מחשב, המחשבת את המסלולים. שיטת הפתרון הנומרי מוצגת בנספח ג'.
- (2) ראה נספח ד' להשוואה עם משחק הרדיפה הרגיל.



ציור 4.5 : חתכי ψ של המחסום.

Fig. 4.5 : ψ - Sections of the barrier, $K = 6$, $-\pi \leq \psi \leq 0$

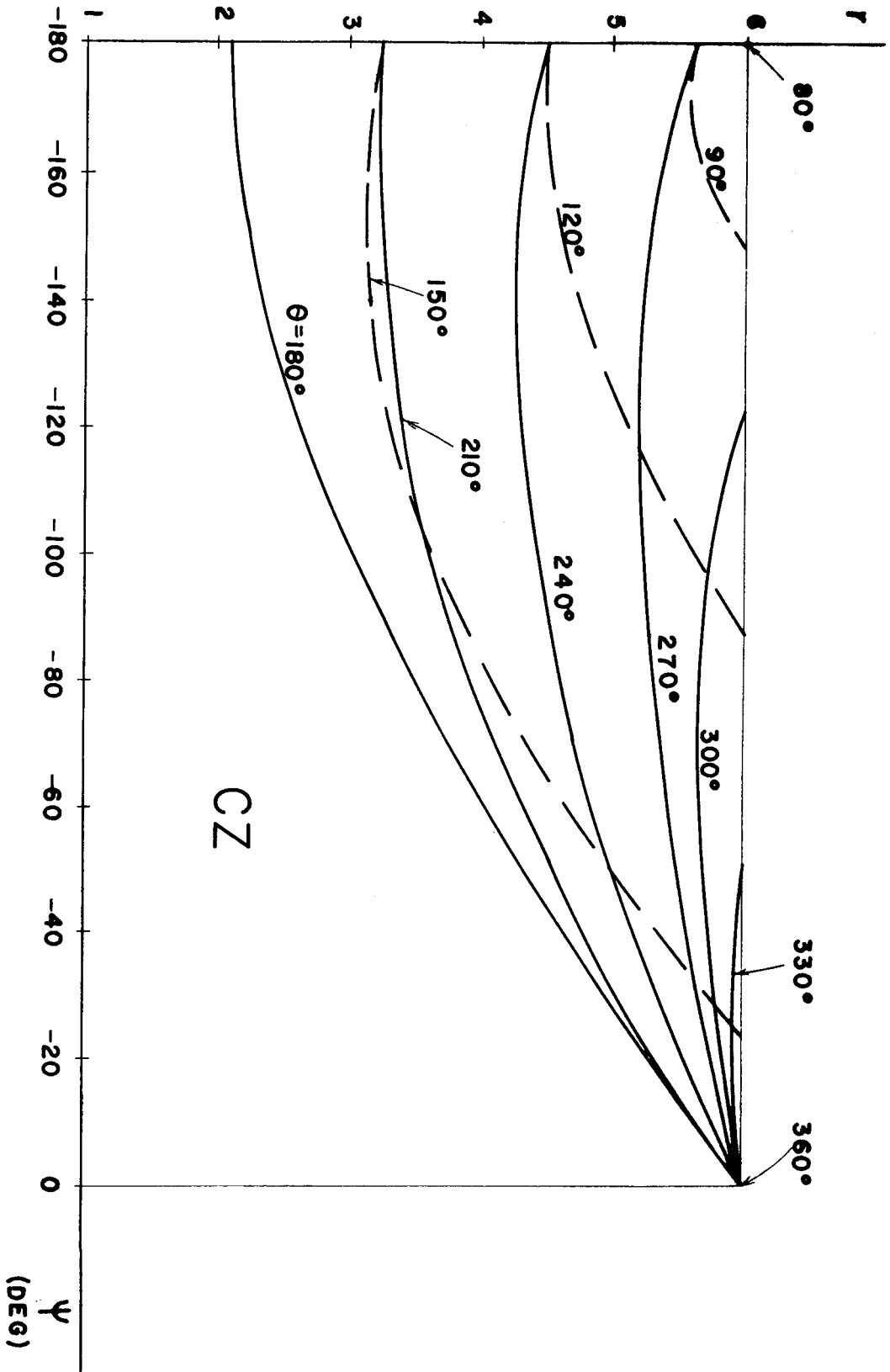
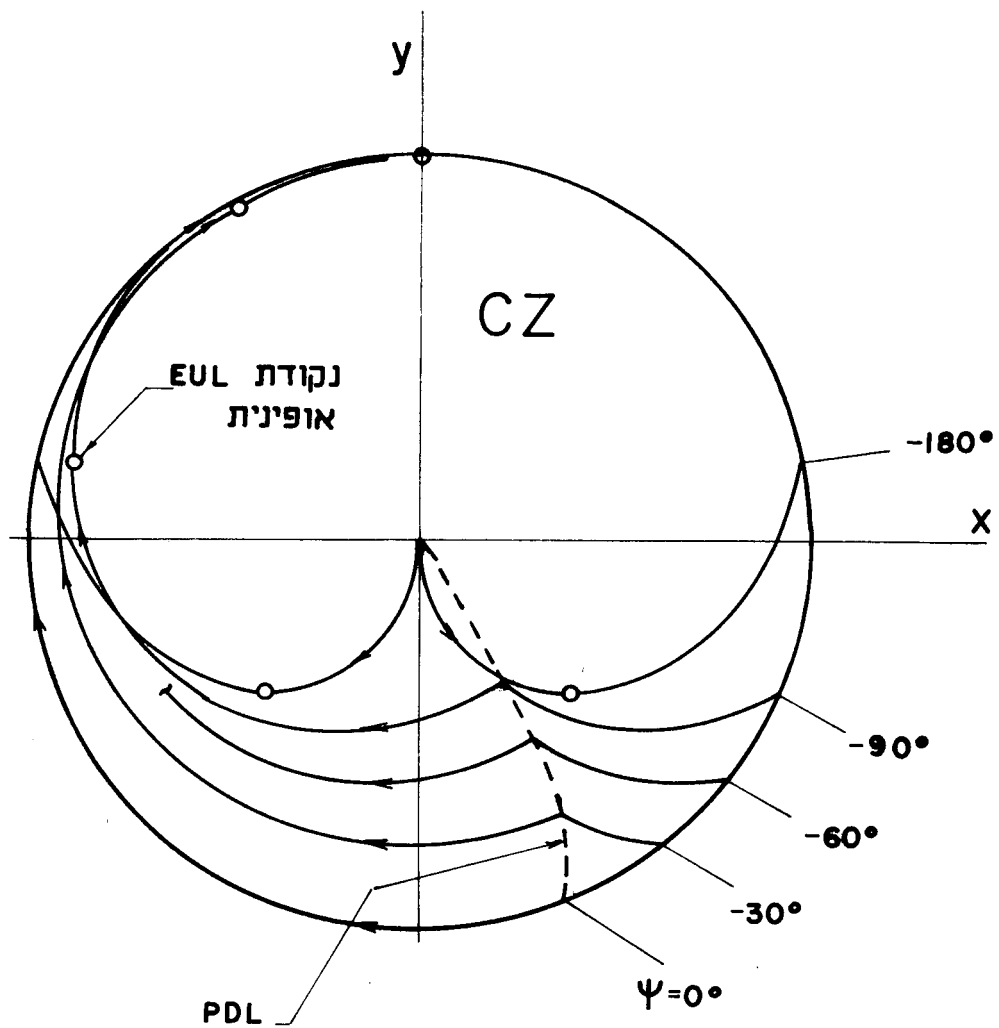


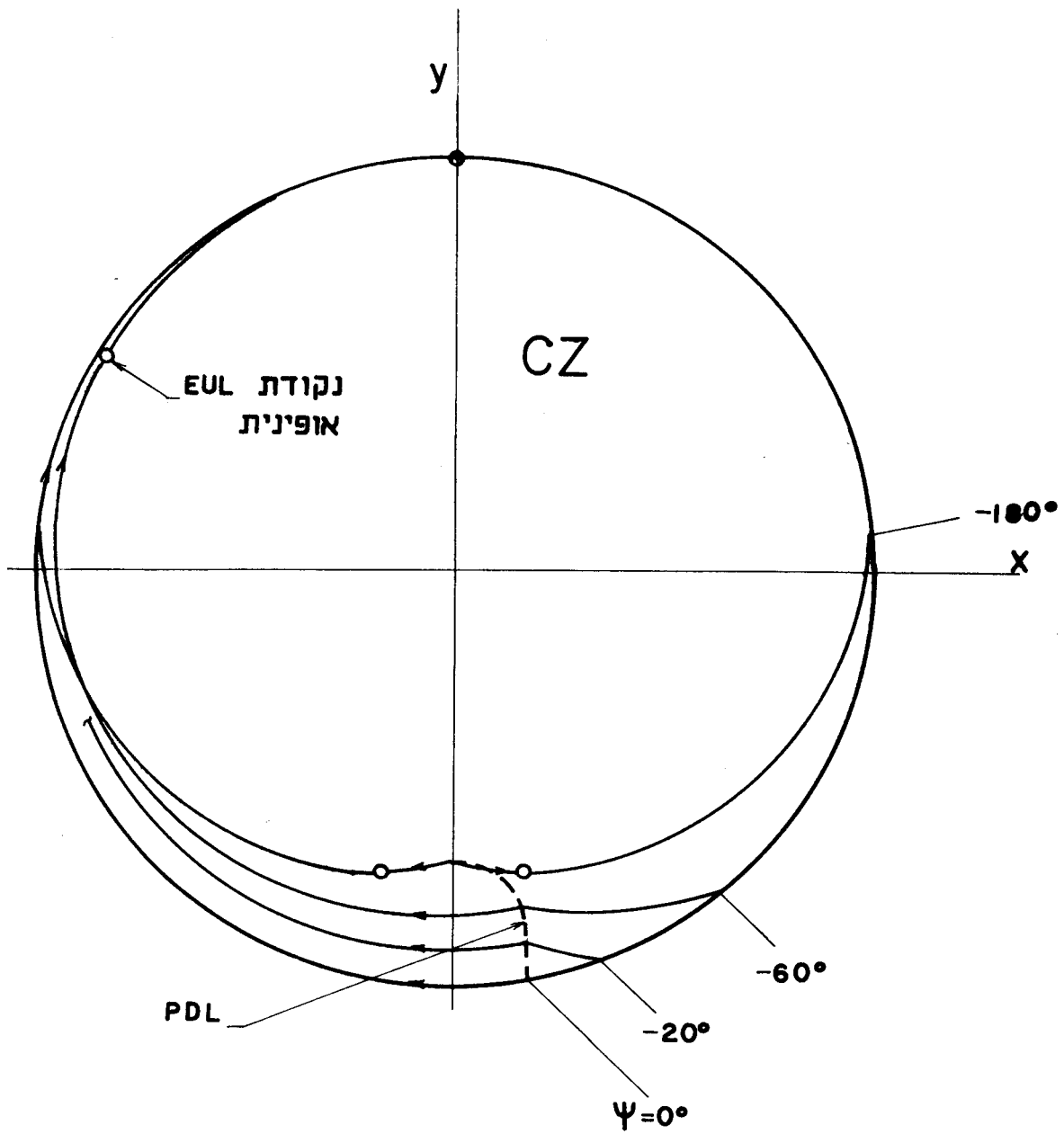
Fig. 4.6 : θ - Sections of the barrier, $K = 6$, $-\pi \leq \psi \leq 0$

צילור 4.6 : חתכי θ של המחסום.



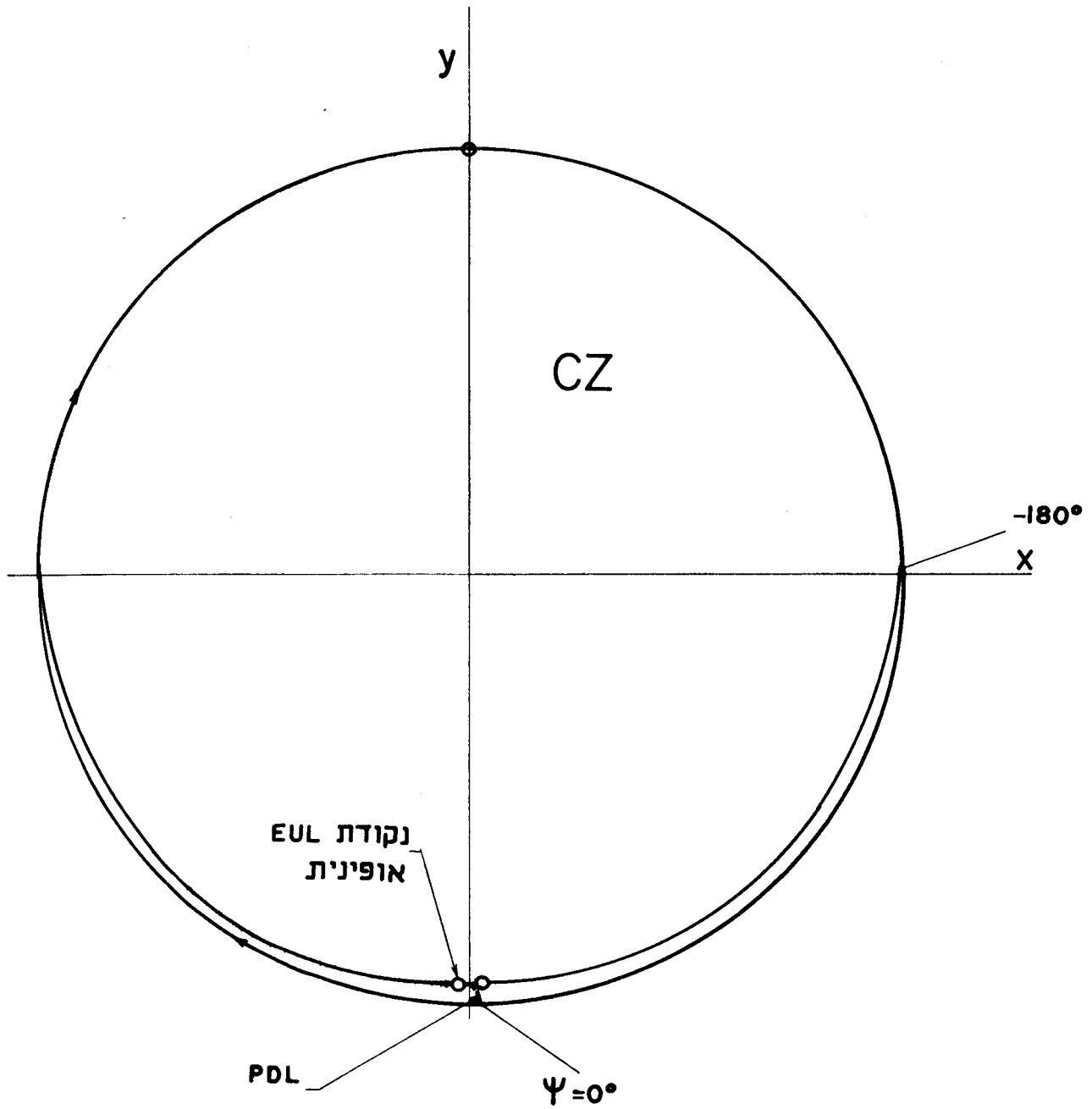
ציור 4.7 : חתכי ψ של המחסום.

Fig. 4.7 : ψ - Sections of the barrier, $K = \pi+2$, $-\pi \leq \psi \leq 0$



ציור 4.8 : חתכי ψ של המחסום.

Fig. 4.8 : ψ - Section of the barrier. $K = 12, -\pi \leq \psi \leq 0$



ציור 4.9 : חתכי ψ של המחסום.

Fig. 4.9 : ψ - Sections of the barrier. $K = 100, -\pi \leq \psi \leq 0$

פרק 5 : ניתוח המחסום

5.1 מבוא

בפרק 4 תארנו את בניית המחסום וצורתו. בפרק זה נבצע ניתוח גאומטרי כמותי של המחסום, ובמיוחד בנקודות ספציפיות חשובות הנמצאות עליו. נראה שעבור $K \geq \pi + 2$ המחסום שבנינו סגור ותפריו אינם נוזלים, ואילו עבור ערכי K נמוכים יותר מתגלות תופעות חדשות, שהטיפול בהן הוא מעבר לתכולת עבודה זו.

כמו כן, נתאר ונסביר את התופעות על הקו הדיספרסלי, ואת תופעת החפיפה בין מסלולים מנוגדים על ה-BUP העגול (קו דיספרסלי ל-E).

5.2 ניתוח גאומטרי של המחסום

בסעיף זה נציג תכונות גאומטריות ופרמטריות אחדות, שיש להן שימוש בניתוח המחסום.

5.2.1 מסלולי ψ קבוע

כאמור, אלו המסלולים המקיימים $\sigma_1 = \sigma_2$. נציב ערך זה במשוואות המסלולים (4.23), ונבטאן כפונקציה של σ_1 בלבד:

$$x = (K - \sigma_1 \psi) \sin(\psi + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 (1 - \cos \psi) \quad (5.1)$$

$$y = (K - \sigma_1 \psi) \cos(\psi + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 \sin \psi$$

אלו משוואות מעגלים בעלי:

$$r_1 = K - \sigma_1 \psi = K - |\psi| \quad (5.2) \quad \text{רדיוס:}$$

$$x_1 = \sigma_1 (1 - \cos \psi) \quad (5.3) \quad \text{מרכז:}$$

$$y_1 = \sigma_1 \sin \psi$$

נציין שלוש תכונות מענינות:

עבור $|\psi| < K$ מתקבלים ערכי r_1 שליליים. תכונה זו תשמש אותנו בהמשך לבדיקת כיוון הנורמל למחסום, ותתגלה כלא רלוונטית למקרה $K \geq \pi + 2$.

מהירות התנועה הזויתית על המסלולים המעגליים היא 1, כאשר כיוון התנועה הוא נגד השעון למסלולים ימניים ועם השעון לשמאליים.

מרכזי שני מסלולים מעגליים, ימני ושמאלי, באותו חתך ψ , סימטריים סביב הראשית, ומרחקם ממנה הוא $\sqrt{2(1-\cos\psi)}$. המרכזים נמצאים תמיד על מעגלים שמשוואותיהם (5.3).

5.2.2 הנקודה B

הנקודה B (בציור 4.3) היא מפגש EUL^+ עם PDL. בנקודה זו מקיים $\sigma_1^+ = 1$ EUL^+ .

נציב למשוואתו של EUL^+ (4.16):

$$\begin{aligned} x^+ &= (K-\psi^+) \sin\psi^+ + 1 - \cos\psi^+ \\ y^+ &= (K-\psi^+) \cos\psi^+ + \sin\psi^+ \end{aligned} \quad (5.4)$$

מצד שמאל של ה-PDL קיים מסלול מעגלי שמשוואתו היא (5.1) עם $\sigma_1^- = -1$ ועם ψ^- . בסיוע משוואה (4.27), ניתן לפתור את מערכת המשוואות ולקבל את הקשר הבא:

$$K = K_B(\psi) = \frac{2(1-\cos\psi) - \psi \sin\psi + \pi\psi - \pi^2}{\psi - \pi - \sin\psi} \quad (5.5)$$

זו משוואה טרנסצדנטלית ב- ψ . נציג אותה גרפית בציור 5.1. ככל ש- K גדל ψ קטן ולהפך. לא נבדקה הרלוונטיות של הנקודה B עבור $K < \pi + 2$.

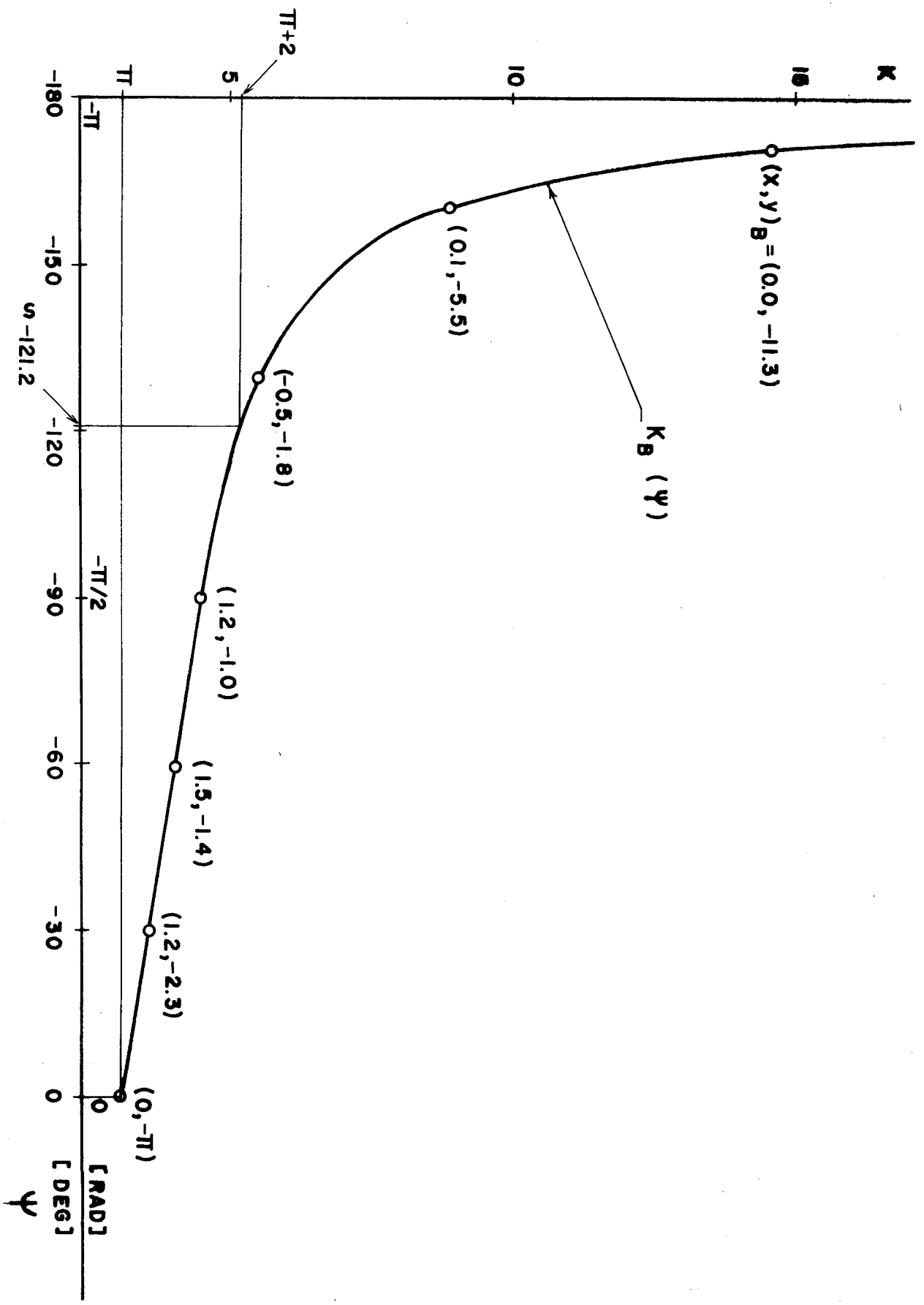


Fig. 5.1 : ψ VS. K at B.

צירוף 5.1 : תאור ψ כפונקציה של K בנקודה B.
 ($-\pi$ - 2π)
 ψ [DEG]

5.2.3 הנקודה C

הנקודה C (בציור 4.3) היא PDL ב- π . נציב במשוואות המסלולים (4.23):

$$|\psi| = \pi$$

$$x = -(K-\pi)\sin\tau + 2 = 0$$

$$y = -(K-\pi)\cos\tau$$

התנאי לקיום משוואת x הוא:

$$\sin\tau = 2/(K-\pi) \leq 1$$

או:

$$K \geq \pi + 2 \quad (5.6)$$

נחשב את y המתקבל:

$$y = -\sqrt{(K-\pi)^2 - 4} \quad (5.7)$$

בסעיף 5.4.1 נביא הרחבה של התנאי (5.6) לנקודות נוספות על ה-PDL.

5.2.4 הנקודה A'

הנקודה A' (בציור 4.3) היא מפגש PDL עם BUP עגול ($\psi = 0$). נציב במשוואות המסלולים (4.23) את נתוני מסלול ימין בנקודה הבאה:

$$\psi = 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = K^2$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$$

נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$x = -(K-2\pi+2\tau)\sin\tau+2(1-\cos\tau)$$

$$y = (K-2\pi+2\tau)\cos\tau-2\sin\tau \quad (5.8)$$

$$K = \pi-\tau+\sin\tau + \frac{(1-\cos\tau)^2}{\pi-\tau+\sin\tau}$$

נשתמש גם ב-(4.22) עבור זמן ההתחלה על EUL^+ :

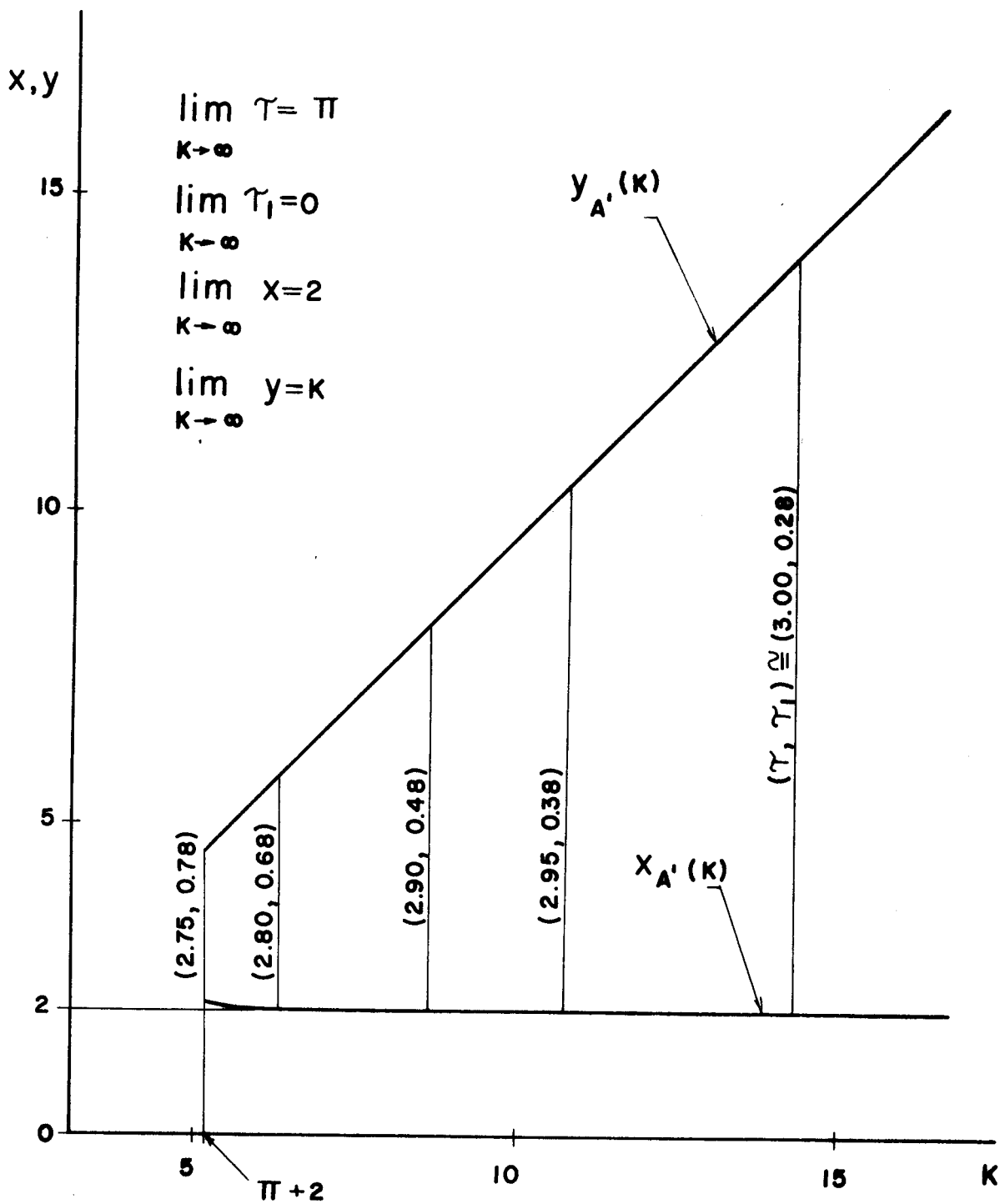
$$\tau_1 = 2(\pi-\tau)$$

זו מערכת משוואות טרנסדנטלית ב- K , עם הפרמטר τ . נציג אותה גראפית בציר 5.2, עבור התחום $K \geq \pi+2$. נציין את הנקודות הבאות:

(א) $\tau_1 < \pi$, ולכן הנקודה על EUL^+ , ממנה יוצא המסלול ל- A' , נמצאת לפני B , כנדרש.

(ב) כאשר K שואף לאינסוף, $\tau_1 = 0$, ואז המסלול ל- A' יתלכד עם המטרה, כפי שזה צפוי מאחר שבערך זה של K אזור ההתחמקות מצטמצם לאפס.

(ג) עבור כל ערכי K , $K \geq \pi+2$, x שומר על ערך קרוב מאד ל-2. דוגמא לתופעה זו ניתן לראות במהרה ד' בציר 4.2, עבור $\psi_0 = 2\pi$ בנקודת ההתחלה E_0 , כאשר רדיוס התצפית הוא המרחק $K = P_1 E_0$. מצב זה מדמה התחלת משחק על הנקודה A' , וכו' $x \approx 2$.



ציור 5.2 : תאור x, y כפונקציה של K בנקודה A' .

Fig. 5.2 : x, y VS. K at A' . $K \geq \pi + 2$

5.3 בדיקת המחסום

הבנייה שהוצגה בפרק 4 התבססה על ההנחות שכיוון הנורמל למחסום תמיד לאזור התפיסה, ושלא מתרחשים מיתוגים בפונקציות המיתוג בזמן הבנייה לאחור של מסלולים. להלן נבדוק זאת.

5.3.1 משוואות הנורמל ופונקציות המיתוג

בדומה לבניית המסלולים האופטימליים הנובעים מ-EUL, מאחר שהנורמל רציף בחציית EUL, נוכל לקבל תנאי התחלה מ-(4.17) ע"י הצבת $\tau = \tau_1$:

$$v_{x0} = -\sigma_1 \sin \tau_1$$

$$v_{y0} = -\cos \tau_1 \quad (5.9)$$

$$v_{\psi 0} = 0$$

נציב תנאי ההתחלה למשוואות הנורמל (3.24), כאשר $s_1 = -1$, $s_2 = \sigma_1 \tau_1$ נעזר ב-(4.20) וב-(4.21):

$$v_x = -\sigma_1 \sin(\tau + \tau_1) = -\sin(\psi + \sigma_2 \tau)$$

$$v_y = -\cos(\tau + \tau_1) = -\cos(\psi + \sigma_2 \tau) \quad (5.10)$$

$$v_\psi = -\sigma_2 (1 - \cos \tau)$$

הבקורות האופטימליות, מתוך (3.25) ו-(3.26) או מתוך (B.25), וכן מ-(5.10):

$$\sigma_1 = \operatorname{sgn}[\sigma_1 (1 - \cos(\tau + \tau_1))] = \operatorname{sgn}[\sigma_1 (1 - \cos(\psi + \sigma_2 \tau))] \quad (5.11)$$

$$\sigma_2 = \operatorname{sgn}[-\sigma_2 (1 - \cos \tau)]$$

עבור $\tau = 0$ מתקבלות גם הבקורות האופטימליות של EUL.

פונקציות המיתוג מתאפסות בזמן המיתוג (אף כי אינן מחליפות סימן).
נבחן מתי מתרחשים המיתוגים עבור התחום $K \geq \pi + 2$ בלבד.

מיתוג σ_1 על EUL יתרחש בזמן:

$$\tau_{1s} = 2\pi$$

בעזרת ציור 5.1 ומשוואת $\psi(\tau)$ ב-(4.16), ניתן לראות שמיתוג זה מתרחש מעבר לנקודה B, ולכן אינו רלוונטי.

מיתוג σ_2 על מסלול אופטימלי (Tributary) יתרחש בזמן:

$$\tau_s = 2\pi$$

מיתוג זה מתרחש אחרי מיתוג σ_1 על מסלול אופטימלי, ולכן הניתוח שלהלן יכלול אותו.

מיתוג σ_1 על מסלול אופטימלי יתרחש בזמן:

$$\tau_s = 2\pi - \tau_1 \quad (5.12)$$

במסלולי ψ משתנה $(\sigma_1 = -\sigma_2)$, המיתוג יתרחש בחתך הבא (בעזרת (4.21)):

$$|\psi_s| = 4\pi - \tau_1 \geq 2\pi$$

כלומר, המיתוג מתרחש מעבר לנקודת חיתוך המסלול עם PDL.

במסלולי ψ קבוע $(\sigma_1 = \sigma_2)$, המסלולים המעגליים, נחשב את הנורמל בזמן המיתוג, בעזרת (5.10) ו-(5.12):

$$v_{xs} = 0$$

$$v_{ys} = -1 \quad (5.13)$$

$$v_{\psi s} = -\sigma_2(1 - \cos \tau_1)$$

במישור (x, y) כיוון הנורמל בזמן המיתוג כלפי מטה. בנקודה תחתונה של מסלול מעגלי, כיוון זה מצביע אל אזור ההתחמקות (ראה ציורים בפרק 4). מאחר שכיוון הנורמל צריך להיות לאזור התפיסה, לא יהיה מיתוג בנקודה תחתונה. לפיכך, המיתוג מתרחש בנקודה עליונה של מסלול מעגלי, אשר נמצאת מעבר ל-PDL ולכן אינה רלוונטית.

לסיכום, עבור $K \geq \pi + 2$, אין מיתוגים נוספים של הבקורות האופטימליות. לא נבדק קיום מיתוגים עבור $K < \pi + 2$.

5.3.2 כיוון הנורמל

נבדוק, עבור $K \geq \pi + 2$, האם הנורמל למחסום פונה לכיוון אזור התפיסה כנדרש. במסלול מעגלי הכיוון צריך להיות אל המרכז. התנאי לנורמל בכיוון מרכז מסלול מעגלי הוא:

$$\operatorname{sgn} \bar{r}_1 = \operatorname{sgn}(-v) \quad (5.14)$$

כאשר \bar{r}_1 הוא רדיוס וקטור במסלול המעגלי. נשתמש ב-(5.2) וב-(5.3) ונקבל את התנאי:

$$r_1 = K - \sigma_1 \psi > 0 \quad (5.15)$$

אם נבחן תנאי זה עם התנאי (5.5) לקיום הנקודה B, באמצעות הציור 5.1, ובערכים המתאימים של ψ , נראה שעבור $K \geq \pi + 2$ התנאי (5.15) מתקיים, ולכן המחסום תקין מהיבט זה.

5.4 ניתוח הקו הדיספרסלי PDL

5.4.1 הוכחת קיום PDL עבור $K \geq \pi + 2$

בעזרת משוואות המסלולים המעגליים (5.2) ו-(5.3) נפתח התנאי לחיתוך בין מסלולים מעגליים מימין ומשמאל. התנאי הוא:

$$\sqrt{(x_1^+ - x_1^-)^2 + (y_1^+ - y_1^-)^2} \leq r_1^+ + r_1^- \quad (5.16)$$

נקבל את התנאי הבא:

$$K \geq \pi + \sqrt{2(1 - \cos\psi)} \quad (5.17)$$

המקסימום של אגף ימין של אי השיויון הוא כאשר $|\psi| = \pi$. לכן עבור

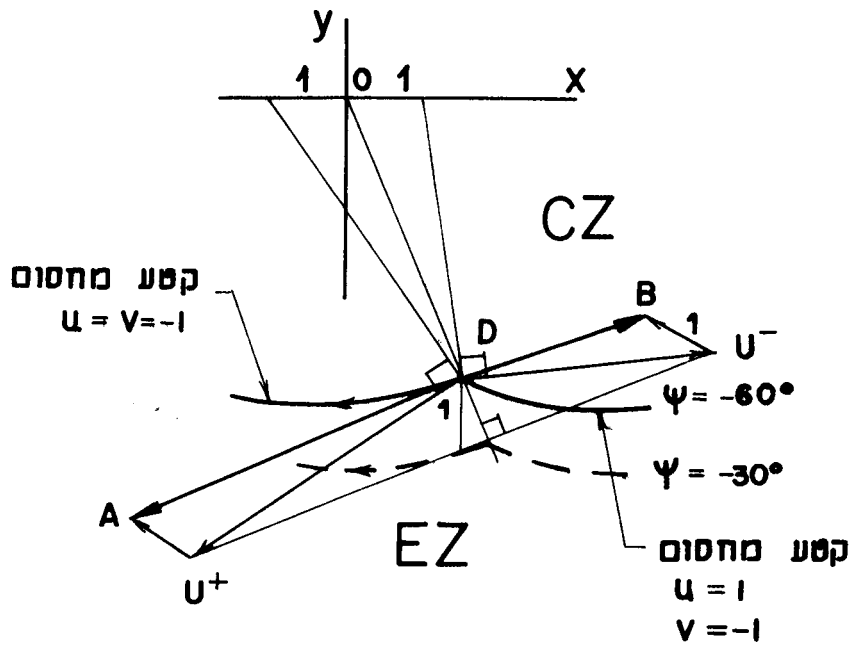
$$K \geq \pi + 2 \quad (5.18)$$

כל המסלולים המעגליים יחתכו ביניהם. ברור שתנאי זה יכלול גם חיתוך בין כל המסלולים המעגליים ללא מעגליים.

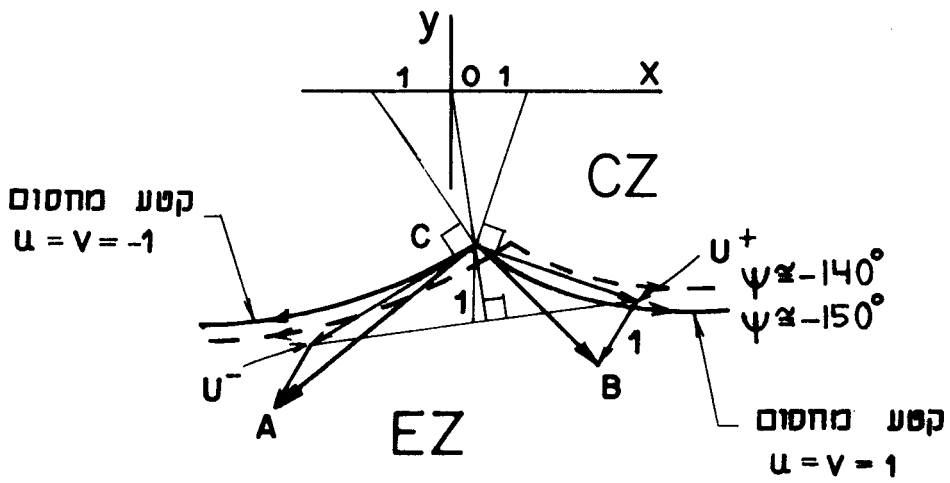
האמור בסעיף זה, יחד עם הסעיפים הקודמים בפרק זה, מבטיח קיום מחסום סגור ולא נוזל אם (5.18) מתקיים.

5.4.2 תאור PDL בוקטוגרמות

הקו הדיספרסלי PDL מורכב משלושה קטעים. על פני הקטעים $A'B$ ו- $A'B'$ (ראה ציור 4.3) מתחלפת הבקרה האופטימלית של P , ואילו בקרתו של E נשארת קבועה. על פני הקטע BB' מתחלפות הבקורות של שני השחקנים. מצבים אלה מתוארים במקרים ד' ו-ג' בהתאמה, במרחב האמיתי בציור 4.2, ובמרחב המצב בציורים 4.3 ו-4.5. בסעיף זה נשתמש בוקטוגרמות כדי לתאר באופן יוריסטי את התופעות על המחסום, בעזרת הציור 5.3.



מקרה ד : $u = \pm 1$; $v = -1$; $\psi = -60^\circ$



מקרה ג : $u = v = \pm 1$; $\psi = -150^\circ$

ציור 5.3 : וקטורגמות על PDL מחסום - מקרים ג', ד'.

Fig. 5.3 : Vectograms on PDL of the barrier - cases C & D.

K = 6.

נתבונן תחילה במקרה ד'. מתואר קטע של חתך המחסום בסביבת הנקודה $D(\psi = -60^\circ)$. כמו כן, מתואר מתחתיו קטע של החתך $\psi = -30^\circ$ בקו מרוסק. הוקטורים המלאים של הדינמיקה הם DA באזור שמאל ו-DB באזור ימין. DA נראה במבט אמיתי, ולכן הוא משיק למחסום הימני, ואילו DB נראה בהטל על המישור (x,y) .

נִוְכִיחַ עֲכָשִׁיו ש- E יחליט בכל מקרה $v = -1$, ללא קשר לבחירתו של P . אם P בחר $u = -1$, אזי אם E ינסה $v = 1$, אז $\dot{\psi} = v - u = 2$, אבל, בעזרת החתך $\psi = -30^\circ$, אנו רואים שהגדלת ψ דוחקת את המצב לאזור תפיסה (CZ), ולכן E יבחר $v = -1$. אם P בחר $u = 1$, אזי אם E ינסה $v = 1$, אז $\dot{\psi} = 0$. הוקטור DB תהיה במבט אמיתי, וכיוונה באופן ברור לתוך אזור התפיסה. לכן E יבחר $v = -1$.

נתבונן במקרה ג'. מתוארת הנקודה $C(\psi = -150^\circ)$. החתך הסמוך $(\psi = -140^\circ)$, המסומן בקו מרוסק, חוצה את החתך של $\psi = -150^\circ$, בשונה ממקרה ד'. שני הוקטורים כאן, CB ו-CA, הם במבט אמיתי. ההנמקה כאן דומה, אלא שבצד ימין ($u = 1$) E יבחר $v = 1$ כדי שלא להכנס לאזור תפיסה.

בשני המקרים, בנקודת ה-PDL ל-P יש שתי אופציות. במקרה הראשון אסטרטגית E נשארת יחידה. לעומת זאת, במקרה השני בחירתו של E מותנית בבחירתו של P . תופעה זו דומה למתואר אצל ISAACS ([4]), פרק 6, סעיף 6.3), ומכונה בשם Instantaneous mixed strategy. היא יוצרת בעייה רגעית, שהטיפול בה דומה לטיפול בבעיית הריטוט (נספח א') ובבעיית חפיפת המסלולים (סעיף 5.5). עלינו להניח רגעית ש- E יודע את בקרתו של P , על מנת שיוכל תמיד לבחור $v = u$. או לחליפין, עלינו להרשות סטייה בשעור ϵ של E מאופטימליות, לאזור שבו האסטרטגיה שלו מוגדרת חד-משמעית. סטייה כזו דוחקת את E לאזור התפיסה ולהפסד במשחק, ולכן נדרש עדכון בהגדרת המשחק - ראה לדוגמא סעיף 5.5.

5.5 ניתוח הקו הדיספרסלי EDL

כפי שהוזכר בפרק 4, קיימת חפיפה של מסלולים, בעלי כיווני תנועה מנוגדים, על הקטע "AA' של ה-BUP המעגלי ($\psi = 0, r = K$). מתוארת נקודה אופינית H בציורים 4.4 ו-4.5.

על ה-BUP מתקיים תמיד $\dot{r} = 0$. בקטע החפיפה, תנועה בכיוון $\pm\psi$, במשיק למטרה, גורמת תמיד לכניסה לאזור התחמקות. אין זה כך בקטע שבו אין חפיפה, למשל A'D. שם תנועה בכיוון $+\psi$ גוררת התחמקות ואילו בכיוון $-\psi$ תפיסה.

לפיכך, על קטע החפיפה, E יתחמק תמיד אם $u = -v$. כאשר P ירצה לתקן ($u = v$), נאמר אחרי תזוזה אינפיניטסימלית קטנה בכיוון $\pm\psi$, זה כבר מאוחר מאחר שהמצב ימצא באזור התחמקות. תופעה דומה על EUL הוזכרה בנספח א':

ניתן להתגבר על תופעות אלו בגישה הבאה (ראה מקרה דומה אצל ISAACS, [4] עמ' 204). גישה זו מחייבת עדכון הגדרת המשחק, אך בצורה שאינה משפיעה על התוצאות המעשיות.

נבנה משטח חצי חדיר, בסמוך מאוד למחסום, במרחק ϵ קטן כרצוננו ממנו, בתוך אזור התפיסה המקורי. ניתן לבנות משטח כזה בקלות ע"י בניית מחסום B_ϵ , בשיטות שלנו, עבור רדיוס תצפית $K_\epsilon \equiv K - \epsilon$ במקום K. המשחק ימשיך להתנהל במרחב K, אך אזור התפיסה החדש יהיה CZ_ϵ , הקטן ב- $G(\epsilon)$ מקודמו CZ. בכל הנקודות בתוך CZ_ϵ מובטחת ל-P תפיסה, חוץ מאשר בקטע החפיפה על ה-BUP. כאן, P יאפשר סטייה בכיוון $\pm\psi$ של לכל היותר $\Delta\psi(\epsilon)$, כך שיספיק לתקן ל- $\dot{\psi} = 0$, לפני או כאשר המצב מגיע למחסום B המקורי, שעליו מובטח ל-P אי-גמר.

בקטע החפיפה "AA', קביעת כיוון התנועה תהיה בידי E, כאשר P יתאים עצמו באמצעות השיטה שתוארה לעיל. תיתכן תנועה בשני הכיוונים, בכל נקודה, בהתאם לבחירתו של E. מרגע שנבחר הכיוון, התנועה ממשיכה, לפי השיטה, על מסלול מקביל בעל אסטרטגיות מוגדרות לשני השחקנים, ולא יהיה שינוי כיוון נוסף.

תופעה זו קרויה דילמה מושהית (Perpetuated Dilemma) והיא נזכרת אצל ISAACS (שם, פרק 6, ובמיוחד ציור 6.9.2), זהו משטח סינגולרי מטיפוס דיספרסל ל-E (EDL), בעל מסלולים מקבילים משני צידיו, כאשר הוא עצמו אינו מסלול אופטימלי. בכל נקודה על פניו ל-E יש אופציית בחירה, כאשר בחירתו של P מותנית בה, ומכאן שמו.

פרק 6 : סיכום ומסקנות

במחקר זה בדונה בעיית ההתחמקות מתצפית במודל שתי המכוניות הזרות. הוצג מקומה של הבעייה במסגרת משפחת משחקי המרדף בכלל ומשחקי ההתחמקות מתצפית בפרט. הוסבה תשומת לב לדואליות עם בעיית הרדיפה הרגילה באותו המודל. למרות הדימיון ההופכי בין המשחקים, בעיית ההתחמקות מורכבת ומפתיעה יותר (ראה השוואה בנספח ד').

פותחו הבקורות האופטימליות והמשוואות הכלליות של המסלולים. מוצג פתרון של משחק הסוג (GOK) בתחום רחב של פרמטרים. מהותו של הפתרון בבנייה של מחסום (Barrier), המפריד בין אזור ההתחמקות, לבין אזור שממנו מובטחת לרודף תפיסה. המחסום נבנה באמצעות עוטפות מסלולים הכוללות שני קוים אוניברסליים למתחמק, המרכזים את כל המסלולים האופטימליים, וקו דיספרסלי לרודף שממנו יוצאים מסלולים לשני כיוונים. על הקו הדיספרסלי, הרודף מکتיב את כיוון התנועה במרחב המצב. על חלק מן הקו לרודף ישנה השפעה ישירה על בקרת המתחמק, ועל חלקו בקרתו של המתחמק בלתי תלויה. באזור אחר של המחסום קיים קו דיספרסלי למתחמק, מטיפוס הדילמה המושהית, שעליו המתחמק מכתיב את כיוון התנועה. על הקו, המתחמק משפיע ישירות על בקרת הרודף.

התמרונים האופטימליים על המחסום מורכבים מפנייה מתמדת לרודף, ומפנייה, ולאחריה תנועה ישרה על המשיק לשני רדיוסי הפנייה, למתחמק. מעניין לציין שהמחסום המתקבל אינו מטיפוס מחסום טבעי (Natural Barrier), בכך שאינו משיק אל הגבול שבין החלק השימושי לחלק הלא שימושי, אלא בנקודה אחת.

הפתרון של משחק הסוג המוצג בעבודה זו נכון לתחום הפרמטרי $K \geq \pi + 2$ (K הוא היחס בין רדיוס התצפית לרדיוס הפנייה המינימלי). החקירה של המקרים בהם $K < \pi + 2$ יכולה להיות המשך מעניין למחקר הנכלל בעבודה זו.

קיימת מוטיבציה ברורה להמשך מחקר בכיוון זה, מאחר שהשימושים הנראים בעין נמצאים באזור הפרמטרי של רדיוסי תצפית נמוכים ורדיוסי פנייה גבוהים. במיוחד נראית כדאית לישום תוצאות המחקר למודלים של מניעת התנגשות, בגישה משלימה לזו הנהוגה היום בבעיות מסוג זה. כלומר, במקום לפתור בעיית אי כניסה לאזור "אדום" של סכנת התנגשות, לפתור בעיית ההתחמקות מאותו אזור. בעייה כזו טרם נחקרה עד כה.

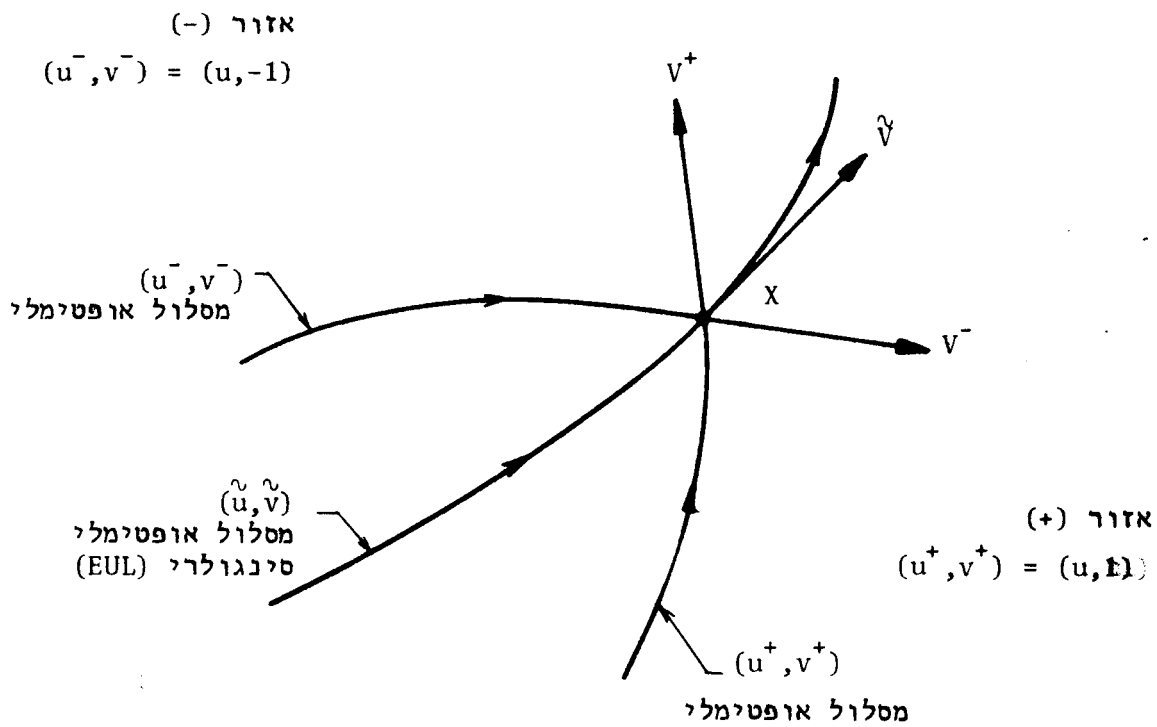
בעיית ההתחמקות במודל שתי המכוביות הזהות, עקב היותה נוחה באופן יחסי לניתוח מתימטי, יכולה לשמש מיגוון נוסף של סוגי תצפית, כגון תצפית בגזרה זוויתית וכד'.

ניתן להרחיב את הגדרת המשחק, ע"י שילוב משחק הרדיפה הרגיל ומשחק ההתחמקות מתצפית במשחק אחד. במשחק כזה, מטרות השחקנים בתוך מעגל התצפית ומחוצה לו יהיו שונות. שילוב כזה יכסה באופן מלא את בעיית התצפית.

נספח א' : תנאים הכרחיים במסלול אופטימלי סינגולרי

נספח זה מבוסס על השיטה שתוארה ע"י BERNHARD [1], כפי שהוצגה ע"י לוין [15].
 הנספח תקף הן למשחק הדרגה והן למשחק הסוג.

נתאר את הסיטואציה הבאה בציור A.1:



ציור A.1 : תאור המסלול הסינגולרי האופטימלי.

Fig. A.1 : The singular optimal path.

בנקודה X נפגשים מסלולים אופטימליים רגילים הבאים מאזור (+) ומאזור (-). בקרתו של P בשני האזורים זהה, אך בקרתו של E שונה. מנקודת המפגש התנועה ממשיכה לאורך המסלול הסינגולרי עם הבקרות (\tilde{u}, \tilde{v}) אותן אנו מחפשים.

על המסלול הסינגולרי, אם E יפנה שמאלה ($v = v^-$), וקטור התנועה יהיה XV^- , אשר יביא את המצב לאזור (+), שבו פנייה שמאלה ל- E אינה אופטימלית. ובאופן דומה, פנייה ימינה תגרור וקטור XV^+ וכניסה לאזור (-) שבו פנייה ימינה אינה אופטימלית ל- E . לפיכך נוצרת מעין תופעת ריטוט (Chatter) בין הוקטורים XV^+ ו- XV^- , שבאופן ממוצע נותנת וקטור $X\tilde{V}$ בכיוון המסלול הסינגולרי.

מסלול מטיפוס זה מכונה קו אוניברסלי ל- E או EUL (Evader Universal Line).

אף כי תופעת הריטוט מתכנסת במקרים מעשיים, לא נוח לעבוד איתה מתימטית, ולכן שוברים באופן מלאכותי את מגבלת חוסר המידע על בקרת היריב. מניחים כאן ש- E יודע את בקרתו של P לאורך EUL. זה לא משנה את תוצאת המשחק מאחר שבאזור זה ממילא בקרתו של P קבועה, ללא קשר לבקרתו של E .

הערה: בהמשך אטפל רק באזור (+), כאשר ההרחבה לאזור (-) אנלוגית.

תהי $\tilde{v}(u)$ אסטרטגית D של v (v - Discriminating Strategy) על EUL.

$$|\tilde{v}(u)| \leq 1, |u| \leq 1$$

יהי ההמילטוניין \tilde{H} :

$$H \equiv H(X, \nabla T, u, \tilde{v}(u)) \tag{A.1}$$

כאשר ∇T הוא גרדיאנט הערך בקרבת EUL או עליו.

הערה: בוקטוגרמות לינאריות קיימת רציפות בגרדיאנט הערך בחציית קו אוניברסלי (ראה [4], Theorem 7.4.2), ולכן אין חשיבות למיקומו של ∇T .

אנו מחפשים תנאים הכרחיים בצומת X , אשר יבטיחו אופטימליות הן על המסלול הרגיל והן על המסלול הסינגולרי. נפריד לשתי בעיות:

תנאי הכרחי לקיום מקסימום עבור P על EUL:

$$H(X, \nabla T, u^+, \tilde{v}(u^+)) \leq H(X, \nabla T, \tilde{u}, \tilde{v}(\tilde{u})) = 0 \quad (\text{A.2})$$

כאן u^+ על EUL הוא חריגה של P מאופטימליות.

תנאי הכרחי לקיום מינימום עבור E באזור (+) בקרבת EUL:

$$0 = H(X, \nabla T, u^+, v^+) \leq H(X, \nabla T, u^+, \tilde{v}(u^+)) \quad (\text{A.3})$$

כאן $\tilde{v}(u^+)$ באזור (+) הוא חריגה של E מאופטימליות.

ע"י Squeeze (הצלבה) של המשוואות (A.2) ו-(A.3) הופכים סימני אי-השוויון לסימני שוויון.

נגדיר את הבעיות הבאות:

בעיית המקסימום:

$$\max_u H(X, \nabla T, u, \tilde{v}(u)) = 0 \quad (\text{A.4})$$

לבעייה זו שני פתרונות - u^+ ו- \tilde{u} , בהסתמך על (A.2).

בעיית המינימום:

$$\min_v H(X, \nabla T, u^+, v) = 0 \quad (\text{A.5})$$

לבעייה זו שני פתרונות - v^+ ו- $\tilde{v}(u^+)$, בהסתמך על (A.3).

נפתור את הבעיות האלו:

(A.5) בעיית המינימום

מתוך משוואה (3.9) האסטרטגיה האופטימלית ל-E:

$$v^* = \text{sgn}(-T_\psi) = \sigma_2 \quad (\text{A.6})$$

מאחר ש-E מרטט, הרי ש-v* מרטט בין ערכי קיצון, ושני הפתרונות של בעיית המינימום שונים. מצב זה יכול להתקיים רק אם פונקציית המיתוג T_ψ מתאפסת:

$$T_\psi = 0 \quad (\text{A.7})$$

ערך זה רציף בחציית EUL, כלומר:

$$T_\psi = T_\psi^- = T_\psi^+ = \tilde{T}_\psi = 0 \quad (\text{A.8})$$

אם נציב את (A.7) למשוואת ההמילטוניין (3.7), נראה שהגורם vT_ψ מתאפס. לכן לא נוכל להפיק ממנה מידע לגבי הערך של $\tilde{v}(u^+)$, אף שאנו יודעים שערכו שונה מ-v⁺.

נניח:

$$\tilde{v}(u^+) = \sigma_2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

שיטת ההוכחה שהנחה זו אכן נכונה תהיה:

(א) נאתר נקודת (או קו) התחלה עבור המסלול (או המשטח) הסינגולרי, המקיימת $T_{\psi_0} = 0$

(ב) נבנה את המסלול הסינגולרי ע"י הצבת $\sigma_2 = 0$ במשוואות הדיפרנציאליות ופתרוןן (ראה סעיף B.2 בנספח B), ונחשב את T_ψ ו- T_ψ לאורך המסלול.

(ג) משוואות \dot{T}_ψ (B.38) ו-(B.39) לאורך המסלול היא:

$$\dot{T}_\psi = T_{x0} \cos \psi_0 - T_{y0} \sin \psi_0 = 0 \quad (\text{A.10})$$

כאשר \dot{T}_ψ היא פונקציה של תנאי התחלה בלבד. כלומר, מספיק שנוכיח את קיום (A.10).

נראה שהקשר (A.10) אכן מתקיים במשחק שלנו.

הערה: הנחנו כאן שהמשוואות הצמודות מתקיימות על המסלול הסינגולרי. ניתן לוודא הנחה זו ע"י בדיקת ההנחות הנחוצות לקיום המשוואות הצמודות בסעיף 3.2.1.

בעיית המקסימום (A.4)

מתוך משוואה (3.9) האסטרטגיה האופטימלית ל-P:

$$u^* = \text{sgn}A = \sigma_1, \quad A \neq 0 \quad (\text{A.11})$$

מאחר שבקרתו של P קבועה, הרי ששני פתרונות בעיית המינימום שווים:

$$u^+ = \tilde{u} = \sigma_1 \quad (\text{A.12})$$

כלומר, יש רציפות בבקר u בכניסה ל-EUL. מאחר שאין רציפות בבקר v , הרי שהמסלולים האופטימליים לא יכנסו בהשקה ל-EUL.

הערות לגאומטריה

נתבונן בציור 2.3 - הוקטוריות, במשולש ABX ($u = 1$). נניח שאזור (+) נמצא ימינה מ-X (בכיוון $-\psi$) ואזור (-) בכיוון שמאלה. אזי וקטור התנועה באזור (+) יהיה XA , ובאזור (-) יהיה XB .

וקטור התנועה על EUL יהיה XG. שלושת הוקטורים כלולים במישור המשולש. על פניו בקרתו של P קבועה ($u = 1$) ואילו E מרטט בין XA ל-XB. אם נדבר על המסלול ש-X עושה לאורך EUL, אזי אוסף המסלולים הרגילים המתחברים אליו בכל נקודה יוצר משטחים משני צידיו. לפיכך, תהיה רציפות בנורמל למשטחים על פני הצומת, כלומר משטח (+) ומשטח (-) ישיקו זה לזה על EUL.

תוצאה זו תקפה גם לגבי משחק הדרגה, כלומר גרדיאנט הערך יהיה רציף על פני הצומת. ניתן להוכיח זאת ע"י הרחבת מימד המשחק ע"י הוספת משתנה מצב נוסף $x_4 = \tau$. משחק כזה הוא בעל תמורה סופית במקום אינטגרלית, והתנועה היא על משטחים בעלי ערך קבוע (חצי חדירים). גרדיאנט הערך יהיה ניצב למשטח, אנלוגית לנורמל במשחק הסוג. הוקטור שנוסף לוקטוגרמה, $x = 1$, קבוע ולכן אינו משפיע. כאמור, תוצאה זו נדונה ע"י ISAACS [4].

הערה נוספת לתופעת הריטוט

כפי שהוסבר, בתהליך הריטוט E נוקט, במשך פרקי זמן קטנים כרצונו, בקרה לא אופטימלית. במשחק הדרגה זה יגרום רק לשינוי קטן כרצונו של E בערך המשחק. לעומת זאת, במשחק הסוג, באופן אנלוגי, המדובר בסטייה קטנה כרצונו של E מהמחסום לכיוון אזור התפיסה, הגוררת תפיסה בטוחה ונצחון ל-P. כלומר, במשחק, כפי שהוא מוגדר, תהיה "נזילה" במחסום על EUL, וזה מחייב שינוי קל בהגדרת המשחק. ראה הסבר מפורט בסעיף 5.5 המטפל בבעייה דומה.

נספח ב' : פתרון המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול האופטימלי

בנספח זה נביא את הפתוח המתימטי של פתרון המשוואות הדיפרנציאליות של המסלול (3.17-3.21). הפתרון כולל מציאת וקטור המצב, גרדיאנט הערך, הבקרות האופטימליות ופונקציות המיתוג לאורך קטעים רציפים של מסלול אופטימלי.

מובאים שני מקרים:

(א) שני השחקנים נוקטים בקרות קיצון.

(ב) P נוקט בקרות קיצון ואילו E בקרת אפס ($\sigma_2 = 0$).

ריכוז התוצאות, עם תנאי התחלה פרמטריים, מובא בסעיף 3.4.

הפיתוח תקף למשחק הדרגה עם ∇T , ולמשחק הסוג עם ν במקום ∇T .

B.1 פתרון המסלול עבור אסטרטגיות קיצון

בסעיף זה נדון במקרה שהשחקנים נוקטים את הבקרות הבאות:

$$\sigma_1 = \pm 1 \tag{B.1}$$

$$\sigma_2 = \pm 1$$

B.1.1 וקטור המצב

אינטגרציה ישירה של $\dot{\psi}$ ב-(3.17) ותנאי התחלה (3.19):

$$\psi = (\sigma_1 - \sigma_2)\tau + \psi_0 \tag{B.2}$$

נגזור את $\overset{\circ}{x}$ ו- $\overset{\circ}{y}$ ב-(3.17) ונבצע הצבות הדדיות:

$$\begin{aligned}\overset{\circ\circ}{x+x} &= -(2\sigma_1 - \sigma_2) \cos\psi + \sigma_1 \\ \overset{\circ\circ}{y+y} &= (2\sigma_1 - \sigma_2) \sin\psi\end{aligned}\tag{B.3}$$

הפתרון הפרטי של x יהיה מהצורה:

$$x = A \cos\psi + B \sin\psi + C\tag{B.4}$$

נגזור את x מ-(B.4) פעמיים ונציב ל-(B.3). לאחר פתוח נקבל:

$$\begin{aligned}A &= -\sigma_2 \\ B &= 0 \\ C &= \sigma_1\end{aligned}\tag{B.5}$$

הפתרון המלא יהיה מהצורה הבאה (לאחר הצבת (B.5))

$$x = C_1 \sin\tau + C_2 \cos\tau - \sigma_2 \cos\psi + \sigma_1\tag{B.6}$$

נציב ל-(B.6) תנאי התחלה מ-(3.19) ונחלץ את C_2 :

$$C_2 = x_0 + \sigma_2 \cos\psi_0 - \sigma_1\tag{B.7}$$

נגזור את (B.6), נציב לתוכו תנאי התחלה מ-(3.19) ומ-(3.17), ונחלץ את C_1 :

$$C_1 = -\sigma_1 \sigma_2 \sin\psi_0 + \sigma_1 y_0\tag{B.8}$$

נציב את המקדמים ל-(B.6) ונפתח:

$$x = \sigma_1 y_0 \sin \tau + x_0 \cos \tau + \sigma_1 (1 - \cos \tau) + \sigma_2 [\cos(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \psi] \quad (B.9)$$

נפתח באופן דומה את משוואת y:

$$y = -\sigma_1 x_0 \sin \tau + y_0 \cos \tau + \sigma_1 \tau - \sigma_2 [\sin(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \sin \psi] \quad (B.10)$$

B.1.2 גרדיאנט הערך

נחלק את שתי המשוואות של (3.18) זו בזו:

$$\frac{\overset{\circ}{T}_x}{\overset{\circ}{T}_y} = -\frac{T_y}{T_x} \quad (B.11)$$

נעביר אגפים, נבצע אינטגרציה ונציב תנאי התחלה (3.19):

$$T_x^2 + T_y^2 = T_{x0}^2 + T_{y0}^2 = \text{const.} \quad (B.12)$$

כלומר, אורך הוקטור (T_x, T_y) קבוע לאורך קטעים במסלול אופטימלי.

נגזור את $\overset{\circ}{T}_x$ ו- $\overset{\circ}{T}_y$ ב-(3.18) ונבצע הצבות הדדיות:

$$\overset{\circ\circ}{T}_x + T_x = 0 \quad (B.13)$$

$$\overset{\circ\circ}{T}_y + T_y = 0$$

הפתרון המלא של T_x יהיה מהצורה:

$$T_x = C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \quad (B.14)$$

נציב ל-(B.14) תנאי התחלה (3.19) ונחלץ את C_2 :

$$C_2 = T_{x0} \quad (B.15)$$

נגזור את (B.14) ונציב לתוכו תנאי התחלה מ-(3.19) ומ-(3.18),
ונחלץ את C_1 :

$$C_1 = \sigma_1 T_{y0} \quad (B.16)$$

נציב את המקדמים ל-(B.14) ונקבל:

$$T_x = T_{x0} \cos \tau + \sigma_1 T_{y0} \sin \tau \quad (B.17)$$

ובאופן דומה עבור T_y :

$$T_y = T_{y0} \cos \tau - \sigma_1 T_{x0} \sin \tau \quad (B.18)$$

נציב את (B.17) ו-(B.18) לתוך \ddot{T}_ψ ב-(3.18), ונשתמש ב-(B.2):

$$\ddot{T}_\psi = T_{x0} \cos(\psi_0 - \sigma_2 \tau) - T_{y0} \sin(\psi_0 - \sigma_2 \tau) \quad (B.19)$$

נבצע אינטגרציה עם תנאי התחלה (3.19):

$$T_\psi = -\sigma_2 \{ T_{x0} [\sin(\psi_0 - \sigma_2 \tau) - \sin \psi_0] + \\ + T_{y0} [\cos(\psi_0 - \sigma_2 \tau) - \cos \psi_0] \} + T_{\psi 0} \quad (B.20)$$

B.1.3 הבקרות האופטימליות ופונקציות המיתוג

הבקרה האופטימלית של E מתקבלת ישירות מ-(B.20):

$$\sigma_2 = -\text{sgn}T_\psi \quad (\text{B.21})$$

הבקרה האופטימלית של P:

$$\sigma_1 = \text{sgn}A = \text{sgn}(xT_y - yT_x - T_\psi) \quad (\text{B.22})$$

ניתן לפתח את A ישירות ע"י הצבת ערכי X ו-T. ל-(B.22) הדרך שלהלן מבוססת על אינטגרציה.

נמצא את \dot{A} :

$$\dot{A} = dA/d\tau = \dot{x}T_y + x\dot{T}_y - \dot{y}T_x - y\dot{T}_x - \dot{T}_\psi \quad (\text{B.23})$$

נציב ממשוואות (3.17) ו-(3.18) ונפתח:

$$\dot{A} = -T_x \quad (\text{B.24})$$

אינטגרציה בסיוע (B.17) ותנאי התחלה (3.19):

$$A = A_0 - T_{x0} \sin\tau - \sigma_1 T_{y0} (1 - \cos\tau) \quad (\text{B.25})$$

כאשר:

$$A_0 \equiv x_0 T_{y0} - y_0 T_{x0} - T_{\psi 0}$$

נציב ל-(B.22) ונקבל את הבקרה של P:

$$\sigma_1 = \text{sgn}[A_0 - T_{x0} \sin\tau - \sigma_1 T_{y0} (1 - \cos\tau)] \quad (\text{B.26})$$

מעניין לראות שמשוואת הבקרה האופטימלית היא טרנסדנטלית ב- σ_1 , מאחר ש- σ_1 מופיעה גם באגף הימני (כנפרד נראה שגם T_{x0} , T_{y0} , A_0 כוללים את σ_1). אבל, אינה כוללת את σ_2 .

B.2 פתרון המסלול עבור בקרת אפס ל-E

בסעיף זה נדון במקרה שבו השחקנים נוקטים את הבקרות הבאות:

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (B.27)$$

$$\sigma_2 = 0$$

המשוואות הדיפרנציאליות ותנאי ההתחלה כמו ב-(3.17-3.19), כאשר מציבים $\sigma_2 = 0$. המשוואה היחידה שמשתנית היא:

$$\dot{\psi} = \sigma_1 \quad (B.28)$$

B.2.1 וקטור המצב

מאינטגרציה ישירה של $\dot{\psi}$ ב-(B.28) ותנאי התחלה (3.19):

$$\psi = \sigma_1 \tau + \psi_0 \quad (B.29)$$

נגזור את \dot{x} ו- \dot{y} ב-(3.17) ונבצע הצבות הדדיות:

$$\dot{x} + \dot{x} = -2\sigma_1 \cos\psi + \sigma_1 \quad (B.30)$$

$$\dot{y} + \dot{y} = 2\sigma_1 \sin\psi$$

פתרון פרטי מהסוג (B.4) שבלקח קודם אינו מתאים כאן, מאחר שהוא פתרון המשוואה ההומוגנית של (B.30) ($C = 0$). לפיכך נציע ל- x פתרון פרטי מהסוג הבא:

$$x = A\tau\cos\psi + B\tau\sin\psi + C \quad (B.31)$$

נגזור את מ-(B.31) פעמיים ונציבו ל-(B.30). לאחר פתוח נקבל:

$$A = 0$$

$$B = -1 \quad (B.32)$$

$$C = \sigma_1$$

הפתרון המלא יהיה מהצורה הבאה (לאחר הצבת (B.32)):

$$x = C_1\sin\tau + C_2\cos\tau - \tau\sin\psi + \sigma_1 \quad (B.33)$$

נציב ל-(B.33) תנאי התחלה מ-(3.19) ונחלץ את C_2 :

$$C_2 = x_0 - \sigma_1 \quad (B.34)$$

נגזור את (B.33) ונציב תנאי התחלה מ-(3.19) ומ-(3.17) ונחלץ את C_1 :

$$C_1 = \sigma_1 y_0 \quad (B.35)$$

נציב את המקדמים ל-(B.33):

$$x = \sigma_1 y_0 \sin\tau + (x_0 - \sigma_1) \cos\tau - \tau\sin\psi + \sigma_1 \quad (B.36)$$

נפתח באופן דומה את משוואת y:

$$y = (1 - \sigma_1 x_0) \sin \tau + y_0 \cos \tau - \tau \cos \psi \quad (\text{B.37})$$

B.2.2 גרדיאנט הערך

משוואות T_x ו- T_y נשארות כמו ב-(B.17) וב-(B.18), מאחר שאינן מכילות את σ_2 או את משתני המצב.

נציב אותן למשוואת T_ψ^0 ב-(3.18), כאשר נשתמש ב-(B.29):

$$T_\psi^0 = T_{x0} \cos \psi_0 - T_{y0} \sin \psi_0 \quad (\text{B.38})$$

כאשר, בעזרת התוצאה (A.8) בנספח א', נקבל:

$$T_\psi = \overset{\circ}{T}_\psi = 0 \quad (\text{B.39})$$

B.2.3 הבקות האופטימליות ופונקציות המיתוג

הבקרה האופטימלית של P נשארת כמו ב-(B.26).

הבקרה האופטימלית של E הוגדרה ב-(B.27).

B.3 פתרון המסלול עבור תנאי התחלה פרמטריים

נקבל צורה קומפקטית יותר של המשוואות ע"י שימוש בתנאי ההתחלה הפרמטריים (3.20) ו-(3.21).

B.3.1 משוואות המסלול עבור בקרות קיצון

נציב תנאי ההתחלה (3.20) למשוואות המצב (B.2), (B.9) ו-(B.10) ונקבל:

$$x = r_0 \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sigma_1 (1 - \cos \tau) + \\ + \sigma_2 [\cos(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \cos \psi]$$

$$y = r_0 \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) + \sin \tau - \\ - \sigma_2 [\sin(\psi_0 + \sigma_1 \tau) - \sin \psi] \quad (B.40)$$

$$\psi = \psi_0 + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau$$

נציב תנאי התחלה (3.21) למשוואות גרדיאנט הערך (B.17), (B.18) ו-(B.20) ונקבל:

$$T_x = s_1 \sin(s_2 + \sigma_1 \tau)$$

$$T_y = s_1 \cos(s_2 + \sigma_1 \tau) \quad (B.41)$$

$$T_\psi = T_{\psi_0} - s_1 \sigma_2 [\cos(\psi_0 - s_2 - \sigma_2 \tau) - \cos(\psi_0 - s_2)]$$

נציב תנאי ההתחלה (3.20) ו-(3.21) לפונקציות המיתוג של P (B.26) ונקבל:

$$A = r_0 s_1 \sin(\theta_0 - s_2) - T_{\psi_0} + \quad (B.42)$$

$$+ \sigma_1 s_1 [\cos(s_2 + \sigma_1 \tau) - \cos s_2]$$

B.3.2 משוואות המסלול עבור בקרת אפס ל-E

נציב תנאי התחלה (3.20) למשוואות המצב (B.29), (B.36) ו-(B.37):

$$x = r_0 \sin(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \tau \sin \psi + \sigma_1 (1 - \cos \tau)$$

$$y = r_0 \cos(\theta_0 + \sigma_1 \tau) - \tau \cos \psi + \sigma_1 \tau \quad (B.43)$$

$$\psi = \psi_0 + \sigma_1 \tau$$

משוואות גרדיאנט הערך כמו ב-(B.41), בהבדל ש- $T_\psi = 0$.

פונקצית המיתוג A כמו ב-(B.42).

נספח ג' : שיטת הפתרון הנומרי

C.1 תהליך הפתרון הנומרי של משחק הסוג

בנספח זה נציג את שיטת הפתרון הנומרי של המחסום במשחק הסוג.

הפתרון מורכב מחישוב נקודות על חתכי ψ של המחסום, בתחום $-\pi \leq \psi \leq 0$, מציאת ה-PDL באופן גראפי, מציאת EUL, ובדיקת פונקציות המיתוג על הפתרון.

החישובים בוצעו באמצעות תוכנית מחשב בשפת BASIC, שנכתבה והורצה על מחשב אישי מדגם Sinclair ZX 81.

תרשים הזרימה בעמוד הבא מתאר את תהליך הפתרון. המספרים הצמודים למשבצות מציינים את המשוואות הרלוונטיות.

C.2 תוכנית מחשב עבור משחק הסוג

בסעיף זה מוצגת תוכנית המחשב לחישוב חתכי ψ של המחסום, ודוגמת תדפיס תוצאות.

נתוני כניסה

K - רדיוס התצפית.

P - הזווית ψ במעלות (סימנה כמו סימן σ_1).

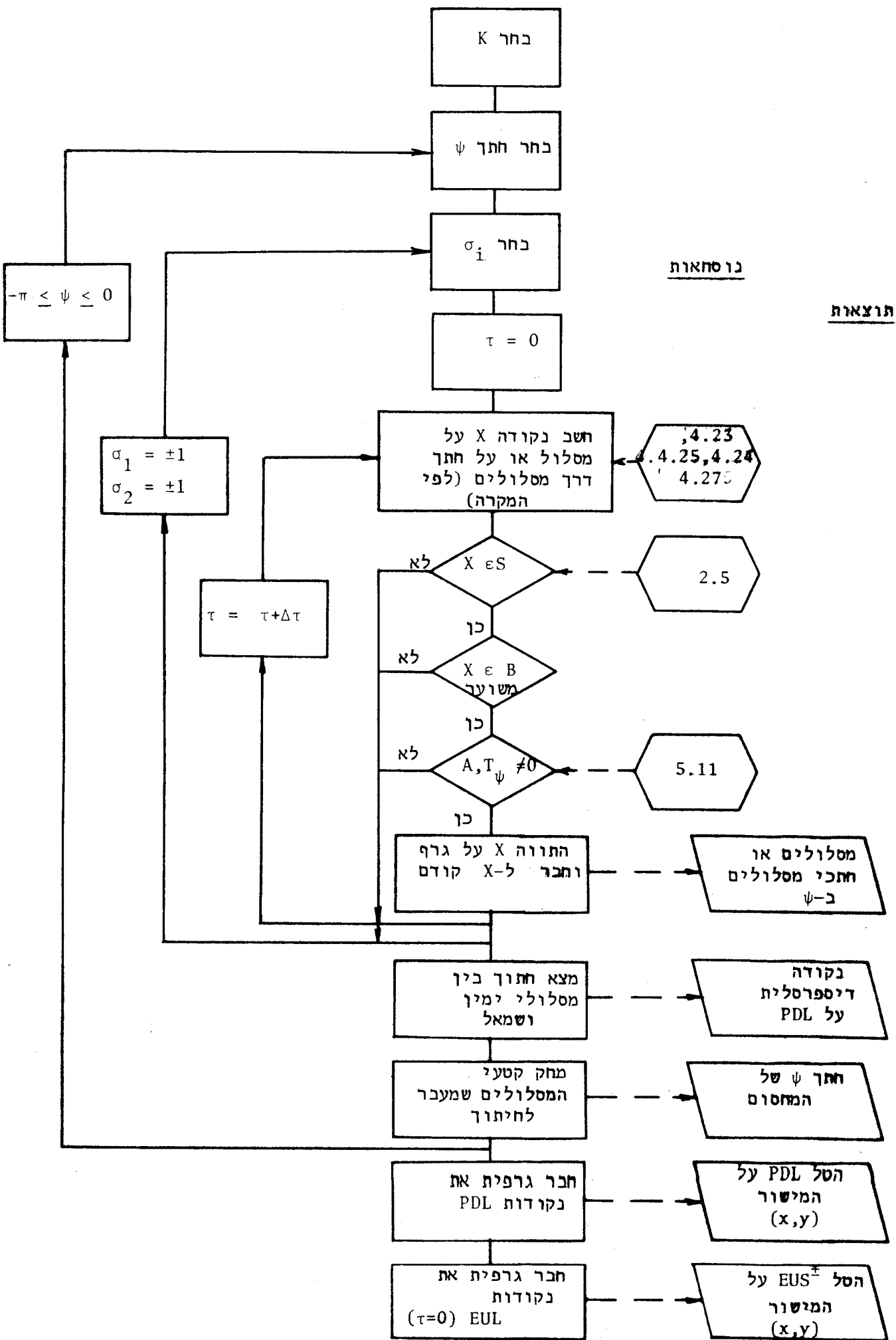
T1 - ערך התחלתי ל- τ .

DT - קפיצות ערך τ .

D1 - הבקרה σ_1 .

D2 - הבקרה σ_2 .

SCALE - קנה מידה של הציוור (כופל את y, x).



נתוני יציאה

XC, YC - מיקום מרכז מסלול מעגלי (עבור $\sigma_1 = \sigma_2$ בלבד).

R - רדיוס מסלול מעגלי (עבור $\sigma_1 = \sigma_2$ בלבד).

XEND, YEND - הנקודה הקיצונית על מסלול, המקיימת את התנאי (5.15). לא
רלוונטי ל- $\pi+2$. $K \geq$

ערכי הטבלה: x, y, τ .

SWITCH P : מיתוג של P הודעות:

SWITCH E : מיתוג של E

OUTSIDE GAME SPACE : נקודה מחוץ למרחב המשחק:

הערה: המיתוגים אינם רלוונטים ל- $\pi+2$. $K \geq$

```

5 REM GOK1 COMPUTES PSI-SECTIONS OF THE BARRIER IN THE GAME OF KIND
10 PRINT "K=";
20 INPUT K
30 PRINT K,"P=";
40 INPUT P
50 PRINT P,"T1=";
70 INPUT T1
80 PRINT T1,"DT=";
90 INPUT DT
100 PRINT DT,"D1=";
110 INPUT D1
120 PRINT D1,"D2=";
130 INPUT D2
140 PRINT D2,"SCALE=";
143 INPUT N
147 PRINT N,"....."
151 GOTO 158
155 REM MID-ENTRANCE-CHANGE OF VARIABLES
157 PRINT "K=";K,"P=";P,"T1=";T1,"DT=";DT,"D1=";D1,"D2=";D2,"
"SCALE=";N,"....."
158 LET PP=PI/180
160 PRINT "XC=";NXD1*(1-COS PP),"YC=";NXD1*SIN PP,"R=";NK*(K-D1XPP),,,
,,
180 PRINT "XEND=";NXD1*(-2XCOS (0.5*(K+D1XPP))+COS PP+1),"YEND=";NX(2X
SIN (0.5*(K+D1XPP))-D1XSIN PP),,,
190 FOR T=T1 TO 100 STEP DT
210 LET C=K-D1XPP+(1+D1XD2)*T
220 LET B=PP-D2XT
230 LET X=CXSIN B-(D1+D2)*XCOS B+D2XCOS PP+D1
240 LET Y=CXCOS B+(D1+D2)*XSIN B-D2XSIN PP
250 LET A1=D1X(1-COS (D1XPP+T))
260 LET A2=D2X(1-COS T)
270 PRINT T,TAB 7;NX,TAB 19,NXY

```

```

280 IF T>=2XPI-D1XPP+(1+D1XD2)*T THEN IF T-DT <2XPI-D1XPP+(1+D1XD2)*T
      THEN PRINT "SWITCH P-";"A1=";A1',''
290 IF T>=2XPI THEN IF T-DT<2XPI THEN PRINT "SWITCH E-";"A2=";A2',''
295 IF XXX +YXY>=KXK THEN PRINT "OUTSIDE GAME SPACE",,,
300 NEXT T
  
```

K=6
P=-300
T1=0
DT=1
D1=-1
D2=-1
SCALE=1

XC=-0.5
R=0.76401224

YC=-0.86602541

XEND=0.073597295

YEND=-0.36839412

- | | | |
|---|-------------|------------|
| 0 | 0.16165401 | -0.4840192 |
| 1 | 0.039074096 | -2.1788087 |
| 2 | -3.0420643 | -4.0652878 |
| 3 | -8.0563352 | -1.7351917 |
- OUTSIDE GAME SPACE

נספח ד' : השוואה בין משחק ההתחמקות מתצפית למשחק הרדיפה

נספח זה מציג את קוי הדמיון והשוני בין משחק ההתחמקות מתצפית לפי מחקר זה למשחק הרדיפה לפי MERZ [9], בדינמיקת שתי המכונות הזרות. ההשוואה ממחישה את הדואליות שבין שני המשחקים כמו גם את יחודיותה של בעיית ההתחמקות מתצפית.

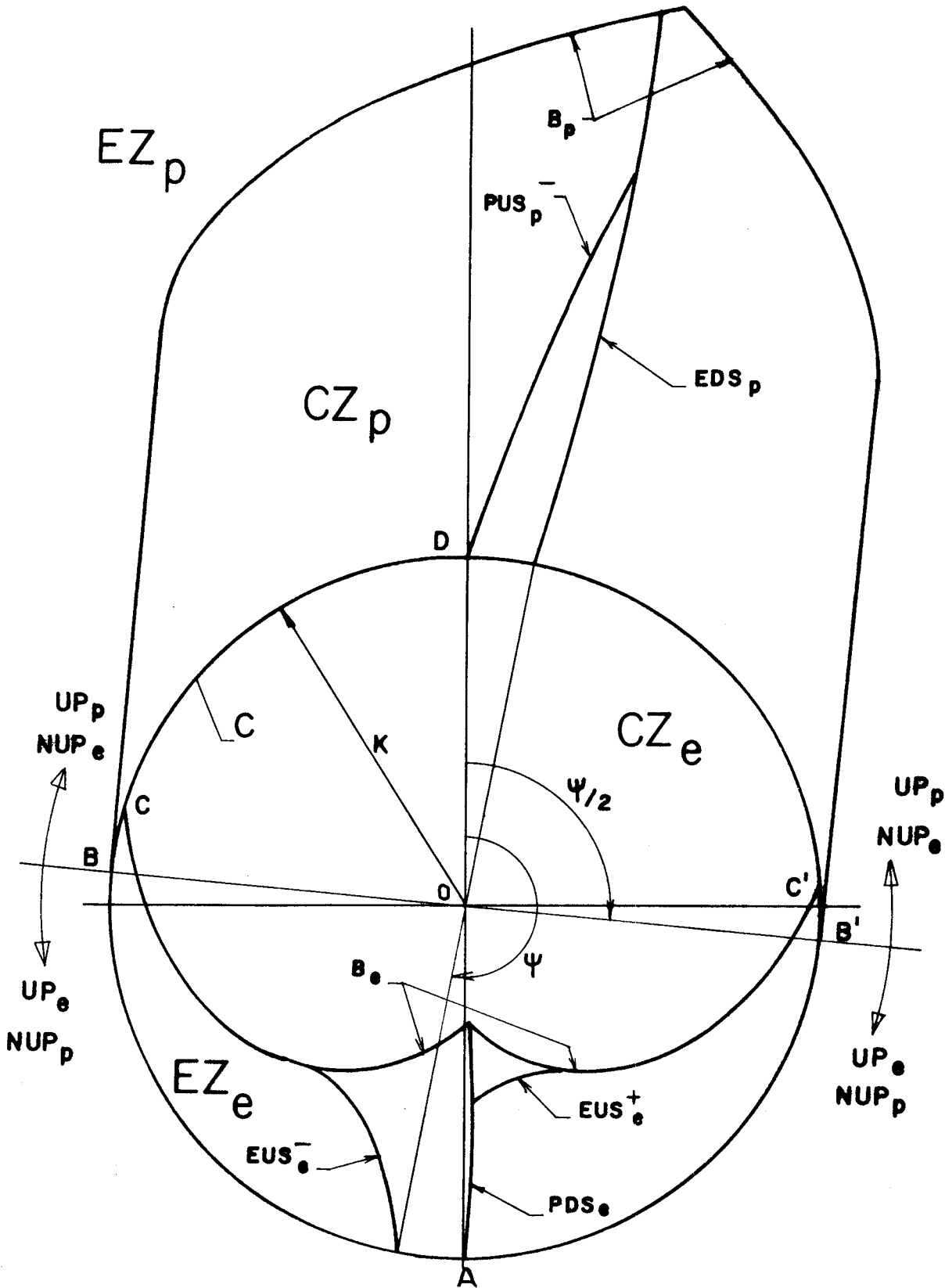
הסבלה הבאה משווה תכונות שונות של המשחקים:

התכונה	משחק ההתחמקות מתצפית	משחק הרדיפה
מרחב המשחק S	בתוך העגול K	מחוץ לעגול K
מטרת המשחק C	העגול K (רדיוס תצפית)	העגול K (רדיוס תפיסה)
מטרות השחקנים	P ממכסם E ממזער	P ממזער E ממכסם
משוואות התנועה/ וקטורגרות	כמו במשחק הרדיפה	כמו במשחק ההתחמקות
הפתרון הכללי של המשוואות הדיפרנציאליות	כמו במשחק הרדיפה	כמו במשחק ההתחמקות
הבקורות האופטימליות	הפוכות בסימנן בהשוואה למשחק הרדיפה	הפוכות בסימנן בהשוואה למשחק ההתחמקות
תנאי התחלה וסיום (זמן רגיל)	UP זהה ל-NUP של משחק הרדיפה ולהפך. המחסום אינו טבעי כלומר אינו משיק ל-BUP.	UP זהה ל-NUP של משחק ההתחמקות ולהפך. המחסום טבעי, כלומר משיק ל-BUP.
(1) במשחק הסוג	מסלולים מתחילים על דיספרסל או על NUP, ומסתיימים בנקודה D (ציור 4.3).	מסלולים מתחילים על דיספרסל ומסתיימים בנקודה D, או על BUP.
(2) במשחק הדרגה	מסלולים מתחילים על דיספרסל או על NUP, ומסתיימים על UP.	מסלולים מתחילים על דיספרסל ומסתיימים על UP.

התכונה	משחק ההתחמקות מתצפית	משחק הרדיפה
תמרונים אופייניים	P - פנייה מתמדת. E - פנייה, ולאחריה התיישרות	P - פנייה, ולאחריה התיישרות. E - פנייה מתמדת.
תופעות סינגולריות	משטחים אוניברסליים ל-E משטח דיספרסלי ל-P דילמה מושהית ל-E	משטח דיספרסלי ל-E משטחים אוניברסליים ל-P אין דילמה מושהית
חתכי ψ של מרחב המצב	כוללים בחלקם את שני המשטחים האוניברסליים	כוללים משטח אוניברסלי אחד
רגישות לפרמטרים	קיים תמיד מחסום סגור, שגודלו תלוי ב-K. עבור $K < \pi + 2$ משתנית שיטת הבנייה של המחסום.	קיים תמיד מחסום סגור, שגודלו תלוי ב-K. שיטת הבנייה של המחסום אחידה לכל K.

ציור D.1 מתאר חתך ψ אופייני של משחק ההתחמקות מתצפית ומשחק הרדיפה. פנים העגול C שייך למשחק ההתחמקות ויסומן באינדקס e, וחוץ לעיגול שייך למשחק הרדיפה, ויסומן באינדקס p. המחסום B_e של משחק ההתחמקות מפריד בין אזור תפיסה CZ_e לאזור התחמקות EZ_e . המחסום B_p של משחק הרדיפה מפריד בין אזור תפיסה CZ_p לאזור התחמקות EZ_p . מסומנים חתכים דרך משטחים סינגולריים של משחק הדרגה. במשחק ההתחמקות (הפתרון המפורט אינו מוצג בדו"ח זה) מצוירים משטחים אוניברסליים EUS_e^+ ו- EUS_e^- ל-E, ומשטח דיספרסלי PDS_e ל-P. במשחק הרדיפה מצוירים משטח אוניברסלי PUS_p^- ל-P, ומשטח דיספרסלי EDS_p ל-E. כמו כן מסומנים החלק השימושי וגבולותיו בשני המשחקים.

מעניין לציין שמסלול המתחיל באזור ההתחמקות של משחק ההתחמקות (EZ_e) מוביל לאזור ההתחמקות של משחק הרדיפה (EZ_p). לעומת זאת, מסלול המתחיל באזור התפיסה של משחק הרדיפה (CZ_p), אמנם מסתיים בדרך כלל באזור התפיסה של משחק ההתחמקות (CZ_e), אך בקטעים BC ו-BC' הוא חודר לאזור ההתחמקות של משחק ההתחמקות (EZ_e). אם נרצה לסנתז משחק תצפית גלובלי, המאחד את שני המשחקים, תכונה זו אומרת שיתכן מצב של כניסה זמנית לאזור תצפית. במשחק כזה, הקטעים השונים של המטרה C מהווים משטחים סינגולריים מטיפוסים שונים.



ציור D.1 : חתך ψ אופייני סכימטי במשחק ההתחמקות מתצפית ובמשחק הרדיפה.

Fig. D.1 : Schematic typical ψ - section in the surveillance-evasion game and the pursuit game.

REFERENCES - מקורות

- [1] BERNHARD, P., "Singular Surfaces in Differential Games".
Differential Games and Applications, Edited by P. Hagedorn,
H.W. Knobloch and G.J. Olsder, Springer-Verlag, Berlin,
Germany, 1977.

- [2] BLAQUIERE, A., GERARD, F., and LEITMANN, G., "Quantitative
and Qualitative Games", Academic Press, New York and
London, 1969.

- [3] DOBBIE, J.M., "Solution of Some Surveillance-Evasion Prob-
lems by the Methods of Differential Games", Proceedings of
the 4th International Conference on Operational Research,
MIT, John Wiley and Sons, New York, 1966.

- [4] ISAACS, R.P., "Differential Games", 2nd Edition, John Wiley
and Sons, New York, 1975.

- [5] ISAACS, R.P., "The Theory of Collision Avoidance Between
Moving Craft", Unpublished. Formerly published in Hughes
Aircraft Company, SRM1-189, 1958.

- [6] LEWIN, J., and BREAKWELL, J.V., "The Surveillance-Evasion
Game of Degree", Journal of Optimization Theory and Applica-
tions, Vol. 16, Nos. 3/4, 1975.

- [7] LEWIN, J., and OLSDER, G.J., "Conic Surveillance-Evasion",
Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 27,
No. 1, 1979.

- [8] MERZ, A.W., "Homicidal Chauffeur, A Differential Game", Stanford University, Guidance and Control Laboratory, Report No. SUDAAR 418, 1971.
- [9] MERZ, A.W., "The Game of Two Identical Cars", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 9, No.5, 1972.
- [10] MERZ, A.W. and HAGUE, D.S., "A Differential Game Solution to the Coplanar Tail-Chase Aerial Combat Problem", Aerophysics Research Corporation, NASA CR-137809, 1976.
- [11] MILOH, T., SHARMA, S.D., "Maritime Collision Avoidance as a Differential Game", Institute Fur Schiffbau Der Universitat Hamburg, Bericht Nr. 329, 1975.
- [12] OLSDER, G.J., and BREAKWELL, J.V., "Role Determination in an Aerial Dogfight", International Journal of Game Theory, Vol. 3, No.1.
- [13] VINCENT, T.L., and PENG, W.Y., "Ship Collision Avoidance", Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Arizona, Tucson.
- [14] VINCENT, T.L., CLIFF, E.M., GRANTHAM, W.J., and PENG, W.Y., "Aircraft Collision Avoidance", Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Arizona, Tucson.
- [15] י. לוי, קורס במשחקים דו-פרנציאליים, הפקולטה להנדסה אוירונאוטית, הטכניון, חיפה, 1982.

DIFFERENTIAL GAME SURVEILLANCE EVASION IN THE
MODEL OF TWO IDENTICAL CARS

RESEARCH THESIS

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
IN
MECHANICAL ENGINEERING

BY

ISRAEL GREENFELD

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

HAIFA

MAY 1983

This research was carried out in the Faculty of Mechanical Engineering, under the supervision of Dr. Joseph Lewin.

I wish to express my gratitude to Dr. Joseph Lewin for his guidance and thorough instruction.

I thank my wife, Ady, for her patience and vigorous encouragement.

CONTENTS

	<u>Page</u>
ABSTRACT	1
NOTATIONS	3
NOMENCALTURE	6
KEY WORDS	8
<u>Chapter 1:</u> INTRODUCTION	9
1.1 General	9
1.2 Scope of the Study	10
1.3 Review	10
1.4 Contents of the Study	14
<u>Chapter 2:</u> PRESENTATION OF THE SURVEILLANCE-EVASION PROBLEM	15
2.1 Introduction	15
2.2 Definitions	16
2.3 Coordinate Systems	18
2.4 The Game Space	18
2.5 The Kinematic Equations	21
2.6 Normalized Kinematic Equations	22
2.7 Geometrical Description of the Kinematic Equations Through Vectograms	24
2.8 Definition of the Game	30
<u>Chapter 3:</u> GENERAL SOLUTIONS FOR THE PATH EQUATIONS	33
3.1 Introduction	33
3.2 Optimal Controls and the Adjoint Equations	33

CONTENTS (Cont'd.)

	<u>Page</u>
3.3 The Differential Equations of the Optimal Path	39
3.4 Condensation of the Optimal Path Equations	40
<u>Chapter 4:</u> THE GAME OF KIND - DESCRIPTION OF THE BARRIER	 44
4.1 Introduction	44
4.2 The Useable Part	45
4.3 Initial Conditions for the Barrier	47
4.4 General Criteria for Strategies	52
4.5 Equations of the Universal Line EUL	54
4.6 Equations of the Optimal Paths and the Dispersal Line PDL	 56
4.7 Schematic Description of the Barrier	59
4.8 Barrier Sections at Various K's	62
<u>Chapter 5:</u> ANALYSIS OF THE BARRIER	69
5.1 Introduction	69
5.2 Geometrical Analysis of the Barrier	69
5.3 Verification of the Barrier	75
5.4 Analysis of the Dispersal Line PDL	78
5.5 Analysis of the Dispersal Line EDL	81
<u>Chapter 6:</u> SUMMARY	83

CONTENTS (Cont'd.)

	<u>Page</u>
 <u>APPENDICES</u>	
<u>APPENDIX A:</u> NECESSARY CONDITIONS ON THE SINGULAR OPTIMAL PATH	85
<u>APPENDIX B:</u> SOLVING THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE OPTIMAL PATHS	91
B.1 Solving the Path for Extremal Controls	91
B.2 Solving the Path for E's Zero Control	96
B.3 Solving the Path for Parametric Initial Condi- tions	98
<u>APPENDIX C:</u> THE METHOD OF THE NUMERICAL SOLUTION	101
C.1 The Numerical Procedure for the Game of Kind	101
C.2 Computer Program for the Game of Kind	101
<u>APPENDIX D:</u> COMPARISON BETWEEN THE SURVEILLANCE-EVASION GAME AND THE PURSUIT GAME	106
 REFERENCES	 109
 ABSTRACT (English)	 I

The Game of Kind was solved, thus dividing the game space to capture and escape zones, by means of a barrier that separates them. Common methods of the Theory of Differential Games were used. Some aspects of the solution are presented graphically in the realistic and state spaces.

Typical maneuvers consist of constant turn of the pursuer, and constant turn followed by straight line motion of the evader, relating to a singularity of the universal surface type. Symmetry imposes a zone whereby the pursuer has two options of heading, creating another singularity of the dispersal surface type. The seams of the composite barrier were examined and were found to be dispersive, thus nonleaking. The phenomenon Isaacs terms as "Perpetuated Dilemma" was found to exist on part of the seams.

Contrary to the ordinary game of pursuit, the shape of the composite barrier in the surveillance game was found to be sensitive to change of parameters. This work was centered on investigating the barrier for values of K (the ratio of the surveillance radius to the minimal turn radius) greater than $\pi + 2$. It is conjectured that a closed capture zone exists for the cases $K < \pi + 2$ too. This problem awaits another research.

The partial solution and lines for further research, presented in this work, might enlighten the duality between the ordinary pursuit game and the surveillance game. A generalized surveillance game, incorporating both problems, may be synthesized. Some practical aspects of the surveillance-evasion problem were discussed, especially for small K 's, and in context of problems of collision avoidance.